SUITE DE FIBONACCI

1) Présentation

Leonard de Pise, dit Fibonacci, nous a laissé un ouvrage volumineux : *Liber abacci* qui contient tout ce que l'on savait à l'époque, en 1204, sur l'arithmétique et l'algèbre.

Pages 123-124 du manuscrit de 1228 figure le problème suivant :

1ère définition

Une paire P1 de lapins, mâle et femelle, a été mise dans un enclot ; la nature des lapins est telle qu'à l'âge de deux mois une paire, mâle et femelle, engendre une autre paire, mâle et femelle, tous les mois.

La femelle de la paire P1 met bas au bout de deux mois. Posons $\mathbb{N}$-{0}= $\mathbb{N}^*$:

Notons pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n le nombre de paires de lapins dans l'enclot le mois numéro n.

Ainsi $u_1 = 1$ et $u_2 = 1$.

Au bout de deux mois, P1 engendre une autre paire P2 donc $u_3 = 2$.

Au bout de trois mois, P1 engendre une autre paire P3 donc $u_4 = 3$.

Au bout de quatre mois, P1 et P2 engendrent chacune une autre paire P4 et P5 donc $u_5 = 5$.

Au bout de cinq mois, P1, P2, P3 engendrent chacune une autre paire P6,P7 et P8 donc $u_6= 8$

Au bout de n + 1 mois, il y a u_n paires, le $(n + 2)^{ème}$ mois il y a u_{n+1} paires donc il y a

$(u_{n+1} – u_n)$ paires nées ce mois-ci ; les u_n paires engendrent u_n paires le $(n+3)^{ème}$ mois donc il y

a ce mois $(u_{n+1} – u_n) + 2u_n = u_n + u_{n+1}$ paires le mois n + 3 donc $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

Une autre façon de définir cette suite est le problème du sauteur ci-dessous :

2ème définition

Un jeu se compose de cases côte à côte numérotées à partir de 0 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Le pion est sur la case 1 ; on le déplace vers la droite de 1 ou 2 cases ;

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de façons d'arriver sur la case n.

Ainsi $u_1 = 1$ et $u_2 = 1$. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

n	n + 1	n + 2

Il y a u_{n+2} façons d'arriver sur la case n + 2 ; le coup d'avant, soit le pion était sur la case n, il y avait u_n façons d'y arriver et le pion a avancé de deux cases, soit le pion était sur la case n+1 il y avait u_{n+1} façons d'y arriver et le pion a avancé d'une case :

Donc $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

<u>Définition mathématique</u>

Nous renvoyons le lecteur à notre « construction mathématique » 0.8.32iv) pour la démonstration de la définition par récurrence.

Rappelons le résultat :

Soit E un ensemble non vide, soit $a \in E$, soit f une application dans E, alors il existe une unique application g de $\mathbb{N}^*$ dans E telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $g(n+1) = f(g(n))$ et $g(1) = a$.

Prenons $E = \mathbb{R}^2$, pour « a » un couple quelconque de $\mathbb{R}^2$: $a = (x_0, y_0)$

Pour f : l'application dans $\mathbb{R}^2$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x,y) = (y, x + y)$

donc il existe une unique application g de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $g(n+1) = f(g(n))$ et $g(1) = (x_0 , y_0)$;

Donc il existe un unique couple d'applications u et v de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ tel que : $g = (u,v)$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $(u(n+1) ; v(n+1)) = (v(n) ; u(n)+v(n))$ et $u(1) = x_0$ et $v(1) = y_0$

Ainsi $u(n+1) = v(n)$ et $v(n+1) = u(n) + v(n)$ donc $v(n+1) = u((n+1)+1) = u(n+2)$ donc

$u(n+2) = u(n) + u(n+1)$.

Donc pour tout couple (x_0,y_0) de réels il existe une suite $(u(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u(n+2) = u(n+1) + u(n)$ et $u(1) = x_0$ et $u(2) = y_0$

Montrons l'unicité de cette suite :

Soit une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$ et $w_1 = x_0$ et $w_2 = y_0$:

Soit X la partie de $\mathbb{N}^*$: $X = \{n \in \mathbb{N}^* \,/\, (\forall m \in \mathbb{N}^* \cap [1,n])(u_m = w_m)\}$

Montrons par récurrence que $X = \mathbb{N}^*$:

Comme $u_1 = x_0$ et $w_1 = x_0$ alors $u_1 = w_1$ et $u_2 = y_0$ et $w_2 = y_0$ alors $u_2 = w_2$ donc

donc $1 \in X$ et $2 \in X$ donc X est non vide :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: supposons que $n \in X$, montrons que $n + 1 \in X$:

Si $n = 1$ alors $n + 1 = 2$ et $n + 1 \in X$,

Si $n > 1, \forall m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq n + 1$:

Soit $m \leq n$ alors, appliquons l'hypothèse de récurrence donc $u_m = v_m$;

Soit $m = n + 1$, comme $n > 1$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = p + 1$ donc $m = p + 2$

Ainsi $p + 1 \leq n$, appliquons l'hypothèse de récurrence, $u_p = w_p$ et $u_{p+1} = w_{p+1}$

Comme $w_{p+2}= w_{p+1} + w_p$ et $u_{p+2} = u_{p+1} + u_p$, on déduit : $w_{p+2} = w_{p+2}$ i.e. $u_m = w_m$

Donc $\forall m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \leq n + 1$: $u_m = v_m$ donc $n + 1 \in X$

Donc, principe de récurrence, $X = \mathbb{N}^*$ i.e. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Donc pour tout couple de réels (x_0,y_0), il existe une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_1 = x_0$ et $u_2 = y_0$.

En particulier pour $x_0 = y_0 = 1$

il existe une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_1 = 1$ et $u_2 = 1$.

Suite appelée « suite de FIBONACCI »

2) Propriétés

(P0) Pour tout naturel n de $\mathbb{N}^*$: $u_n \in \mathbb{N}^*$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante à partir du rang 2.

Preuve

Posons X = {n∈ℕ*/(∀m∈ℕ*∩[1,n])(u_m∈ℕ)}

Montrons par récurrence sur n que X = ℕ* :

Si n = 1, $u_1 = 1$ donc u_1∈ℕ* donc 1∈X.

Si n = 2 alors $u_1 = 1$ et $u_2 = 1$ donc 2∈X.

Pour tout naturel n tel que n > 1, supposons que n∈X, montrons n + 1∈X :

∀m∈ℕ* tel que m ≤ n + 1 :

Soit m ≤ n alors en appliquant l'hypothèse de récurrence, u_m∈ℕ* ;

Soit m = n + 1, comme n > 1 alors 2 ≤ n donc 1 ≤ n – 1 alors $u_m = u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ comme n∈X alors u_n et u_{n-1} sont dans ℕ* donc leur somme aussi donc u_{n+1}∈ℕ* donc u_m∈ℕ* donc n + 1∈X donc la récurrence est prouvée donc X = ℕ* et pour tout naturel n non nul u_n∈ℕ*.

Pour tout naturel n tel que 2 ≤ n : $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ comme $0 < u_{n-1}$ alors $u_n < u_{n+1}$ donc la suite est strictement croissante à partir du rang 2.

(P1) Pour tout naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{u_k = u_{n+2} - 1}$$

P<u>reuve</u>

Calculons d'abord $u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2$;

Posons X = {n∈ℕ*/($\sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+2} - 1$)}

Pour n = 1, $u_1 = 1 = 2 - 1 = u_3 - 1$ donc 1∈X.

Pour tout naturel n non nul, supposons que n∈X, montrons que n + 1∈X :

$\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1}$, comme n∈X alors $\sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+2} - 1$ donc

$\sum_{k=1}^{n+1} u_k = u_{n+2} - 1 + u_{n+1} = (u_{n+2} + u_{n+1}) - 1 = u_{n+3} - 1 = u_{(n+1)+2} - 1$ donc n + 1∈X, donc la récurrence est prouvée donc X = ℕ* et (P1) est vrai.

(P2) Pour tout naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} u_{2k+1} = u_{2(n+1)}$$

Preuve

Posons X = {n∈ℕ/($\sum_{k=0}^{n} u_{2k+1} = u_{2(n+1)}$)}

Pour n = 0 : $\sum_{k=0}^{0} u_{2k+1} = u_1 = 1 = u_2 = u_{2(0+1)}$ donc 0∈X.

Pour tout naturel n, supposons que n∈X, montrons que n + 1∈X :

$\sum_{k=0}^{n+1} u_{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} u_{2k+1} + u_{2(n+1)+1}$, comme n∈X alors $\sum_{k=0}^{n} u_{2k+1} = u_{2(n+1)}$ donc

$\sum_{k=0}^{n+1} u_{2k} = u_{2(n+1)} + u_{2n+3} = u_{2n+4} = u_{2((n+1)+1)}$ donc n + 1∈X donc la récurrence est prouvée et X = ℕ donc (P2) est vrai.

(P3) pour tout naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} u_{2k} = u_{2n+1} - 1$$

Preuve

Posons X = {n∈ℕ*/($\sum_{k=1}^{n} u_{2k} = u_{2n+1} - 1$)}

Pour n = 1 : $\sum_{k=1}^{1} u_{2k} = u_2 = 1 = 2 - 1 = u_3 - 1 = u_{2\times1+1} - 1$ donc 1∈X.

Pour tout naturel n non nul, supposons que n∈X, montrons que n + 1∈X :

$\sum_{k=1}^{n+1} u_{2k} = \sum_{k=1}^{n} u_{2k} + u_{2(n+1)}$, comme n∈X alors $\sum_{k=1}^{n} u_{2k} = u_{2n+1} - 1$ donc

$\sum_{k=1}^{n+1} u_{2k} = u_{2n+1} - 1 + u_{2n+2} = u_{2n+3} - 1 = u_{2(n+1)+1} - 1$ donc n + 1∈X donc la récurrence est prouvée donc X = ℕ* donc (P3) est vrai.

(P4) Pour tout naturel n tel que 2 ≤ n :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} u_k = (-1)^{n+1} u_{n-1} + 1$$

Preuve

Posons X = {n∈ℕ*-{1}/($\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}u_k = (-1)^{n+1}u_{n-1} + 1$)}

Pour n = 2,

$\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}u_k = (-1)^{1+1}u_1 + (-1)^3u_2 = u_1 - u_2 = 1 - 1 = 0 = (-1)^3u_1 + 1$ donc 2∈X.

Pour tout naturel n tel que 2 ≤ n, supposons que n∈X, montrons que n + 1∈X :

$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\,u_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}u_k + (-1)^{n+2}u_{n+1}$, comme n∈X alors $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}u_k = (-1)^{n+1}u_{n-1} + 1$ donc

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\,u_k = (-1)^{n+1}u_{n-1} + 1 + (-1)^{n+2}u_{n+1} = (-1)^{n+2}(u_{n+1} - u_{n-1}) + 1$$

Donc $\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\,u_k = (-1)^{n+2}u_n + 1 = (-1)^{(n+1)+1}u_{(n+1)-1} + 1$ donc n + 1∈X donc la récurrence est prouvée donc X = ℕ - {0 ;1} donc (P4) est vrai.

(P5) Pour tout naturel n non nul :

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} {u_k}^2 = u_n u_{n+1}}$$

<u>Preuve</u>

Posons X = {n∈ℕ*/($\sum_{k=1}^{n}{u_k}^2 = u_n u_{n+1}$)}

Pour n = 1, $\sum_{k=1}^{1}{u_k}^2 = {u_1}^2 = 1 = 1 \times 1 = u_1 \times u_2 = u_1 u_{1+1}$ donc 1∈X.

Pour tout naturel n non nul, supposons que n∈X, montrons que n + 1∈X :

$\sum_{k=1}^{n+1}{u_k}^2 = \sum_{k=1}^{n}{u_k}^2 + {u_{n+1}}^2$, comme n∈X alors $\sum_{k=1}^{n}{u_k}^2 = u_n u_{n+1}$ donc

$\sum_{k=1}^{n+1}{u_k}^2 = u_n u_{n+1} + {u_{n+1}}^2 = u_{n+1}(u_n + u_{n+1}) = u_{n+1}u_{n+2} = u_{n+1}u_{(n+1)+1}$ donc n + 1∈X donc la récurrence est prouvée donc X = ℕ* donc (P5) est vrai.

(P6) Pour tous naturels non nuls h et k : $u_{h+k+1} = u_h u_k + u_{h+1}u_{k+1}$

<u>Preuve</u>

Posons X = {k∈ℕ*/(∀h∈ℕ*)(($u_h u_k + u_{h+1}u_{k+1} = u_{h+k+1}$)et($u_h u_{k+1} + u_{h+1}u_{k+2} = u_{h+k+2}$))}.

Pour k = 1, pour tout naturel h non nul :
$u_h u_1 + u_{h+1}u_2 = u_h + u_{h+1} = u_{h+2} = u_{h+1+1}$ et
$u_h u_2 + u_{h+1}u_3 = u_h + 2u_{h+1} = u_h + u_{h+1} + u_{h+1} = u_{h+2} + u_{h+1} = u_{h+3} = u_{h+1+2}$ donc 1∈X.

Soit le naturel k non nul, supposons que $k \in X$, montrons que $k + 1 \in X$:

Comme $k \in X$ alors pour tout naturel h non nul, $u_h u_k + u_{h+1} u_{k+1} = u_{h+k+1}$ et $u_h u_{k+1} + u_{h+1} u_{k+2} = u_{h+k+2}$

En additionnant ces deux égalités, on obtient :

$u_h u_k + u_{h+1} u_{k+1} + u_h u_{k+1} + u_{h+1} u_{k+2} = u_{h+k+1} + u_{h+k+2}$ donc

$u_h(u_k + u_{k+1}) + u_{h+1}(u_{k+1} + u_{k+2}) = u_{h+k+3}$ donc $u_h u_{k+2} + u_{h+1} u_{k+3} = u_{h+k+3}$ donc

$u_h u_{(k+1)+1} + u_{h+1} u_{(k+1)+2} = u_{h+(k+1)+2}$ or $u_h u_{k+1} + u_{h+1} u_{(k+1)+1} = u_{h+(k+1)+1}$ est vrai donc $k + 1 \in X$ donc la récurrence est prouvée donc $X = \mathbb{N}^*$ donc

Pour tous naturels h et k non nuls : $u_h u_k + u_{h+1} u_{k+1} = u_{h+k+1}$ donc (P6) est vrai.

Remarque :

Utilisons la deuxième définition pour démontrer (P6) :

Notons que pour aller de la case x à la case y ($x < y$) il y a u_{y-x+1} façons.

Il y a u_{h+k+1} façons d'arriver de la case 1 à la case $h + k + 1$:

Soit le pion a été posé sur la case $h + 1$, il y a u_h façons d'y arriver, ensuite de la case h à la case $h + k + 1$ il y a $u_{h+k+1-(h+1)+1} = u_{k+1}$ façons d'y arriver donc il y a $u_{h+1} u_{k+1}$ façons d'y arriver, en passant par la case $h + 1$;

Soit le pion ne passe pas par la case $h + 1$, donc il était à la case h, il y a u_h façons d'y arriver, ensuite de la case h, il va à la case $h + 2$, car il ne passe pas par la case $h + 1$, de la case $h + 2$ à la case $h + k + 1$ il y a $u_{h+k+1-(h+2)+1} = u_k$ façons d'y arriver donc il y a $u_h u_k$ façons d'y arriver sans passer par la case $h + 1$

Donc il y a $u_{h+1} u_{k+1} + u_h u_k$ façons d'arriver à la case $n + m + 1$

d'où l'égalité (P6).

(P7) Pour tout naturel n non nul :
i) $u_{2n+1} = u_n^2 + u_{n+1}^2$
ii) $u_{2(n+1)} = u_{n+2}^2 - u_n^2$
iii) u_n **divise** u_{2n}
iv) $u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^n$
v) $u_{3(n+1)} = u_{n+2}^3 + u_{n+1}^3 - u_n^3$

Preuve

i)Pour tout naturel n non nul, dans (P6) prenons h = k = n alors $u_{n+n+1} = u_n u_n + u_{n+1}u_{n+1}$donc

$u_{2n+1} = u_n^2 + u_{n+1}^2$.

ii)Dans (P6) prenons h = n et k = n + 1 alors $u_{n+n+1+1} = u_n u_{n+1} + u_{n+1}u_{n+1+1}$ donc
$u_{2n+2} = u_n u_{n+1} + u_{n+1}u_{n+2} = u_{n+1}(u_n + u_{n+2}) = (u_{n+2} - u_n)(u_{n+2} + u_n) = u_{n+2}^2 - u_n^2$

iii) de ii) pour tout naturel non nul, $u_{2n+2} = u_{n+1}(u_n + u_{n+2})$ comme, (P0), les termes de cette suite sont des entiers naturels u_{n+1} divise $u_{2(n+1)}$; ceci est encore vrai si n = 0 car alors u_0 divise $u_{2\times 0}$ est vrai donc pour tout naturel non nul n : u_n divise u_{2n}.

iv) Posons $X = \{n\in\mathbb{N}^*/(u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^n)\}$

Si n = 1, $u_{1+1}^2 = (u_2)^2 = 1^2 = 1 = 1\times 2 - 1 = u_1u_3 + (-1)^1 = u_1u_{1+2} + (-1)^1$ donc $1\in X$.

Soit le naturel n non nul, supposons que $n\in X$, montrons que $n + 1\in X$:

Comme $n\in X$ alors $u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^n$ donc $u_{n+1}^2 + u_{n+1}u_{n+2} = u_n u_{n+2} + (-1)^n + u_{n+1}u_{n+2}$
donc $u_{n+1}(u_{n+1} + u_{n+2}) = u_{n+2}(u_n + u_{n+1}) + (-1)^n$ donc $u_{n+1}u_{n+3} = u_{n+2}u_{n+2} + (-1)^n$ donc
$u_{n+2}^2 = u_{n+1}u_{n+3} + (-1)^{n+1}$ donc $u_{(n+1)+1}^2 = u_{n+1}u_{(n+1)+2} + (-1)^{n+1}$ donc $n + 1\in X$, donc la récurrence est prouvée donc $X = \mathbb{N}^*$ donc (iv) est vrai.

v)Dans (P6) prenons h = n + 1 et k = 2n + 1 alors
$u_{n+1+(2n+1)+1} = u_{n+1}u_{2n+1} + u_{n+2}u_{2n+2}$ soit $u_{3n+3} = u_{n+1}u_{2n+1} + u_{n+2}u_{2n+2}$
utilisons ii) : $u_{2n+2} = u_{n+2}^2 - u_n^2$ et i) $u_{2n+1} = u_n^2 + u_{n+1}^2$
donc $u_{3n+3} = u_{n+1}(u_n^2 + u_{n+1}^2) + u_{n+2}(u_{n+2}^2 - u_n^2) = u_{n+1}u_n^2 + u_{n+1}^3 + u_{n+2}^3 - u_{n+2}u_n^2$ donc
$u_{3(n+1)} = u_{n+2}^3 + u_{n+1}^3 - u_n^2(u_{n+1} - u_{n+1}) = u_{n+2}^3 + u_{n+1}^3 - u_n^2u_n = u_{n+2}^3 + u_{n+1}^3 - u_n^3$.

(P8) Pour tout naturel n non nul :

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{2n} u_k\, u_{k+1} = {u_{2n+1}}^2 - 1}$$

<u>Preuve</u>

Posons $X = \{n\in\mathbb{N}^*/(\sum_{k=1}^{2n} u_k\, u_{k+1} = {u_{2n+1}}^2 - 1)\}$

Si n = 1 $\sum_{k=1}^{2} u_k\, u_{k+1} = u_1u_2 + u_2u_3 = 1 \times 1 + 1 \times 2 = 3 = 2^2 - 1 = {u_{2\times 1+1}}^2 - 1$ donc $1\in X$.

Soit le naturel non nul n, supposons que $\in X$, montrons que $n + 1\in X$:

$\sum_{k=1}^{2(n+1)} u_k u_{k+1} = \sum_{k=1}^{2n} u_k\, u_{k+1} + u_{2n+1}u_{2n+2} + u_{2n+2}u_{2n+3}$, comme $n\in X$ alors

$$\sum_{k=0}^{2(n+1)} u_k\, u_{k+1} = {u_{2n+1}}^2 - 1 + u_{2n+1}u_{2n+2} + u_{2n+2}u_{2n+3}$$

$$\sum_{k=0}^{2(n+1)} u_k\, u_{k+1} = u_{2n+1}(u_{2n+1} + u_{2n+2}) + u_{2n+2}u_{2n+3} - 1$$

$$\sum_{k=0}^{2(n+1)} u_k\, u_{k+1} = u_{2n+1}u_{2n+3} + u_{2n+2}u_{2n+3} - 1 = u_{2n+3}(u_{2n+1} + u_{2n+2}) - 1$$

$$\sum_{k=0}^{2(n+1)} u_k\, u_{k+1} = {u_{2n+3}}^2 - 1 = {u_{2(n+1)+1}}^2 - 1$$

Donc n + 1∈X donc la récurrence est prouvée donc X = ℕ* donc (P8) est vrai.

(P9) Pour tout naturel n :

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{2n+1} u_k\, u_{k+1} = {u_{2(n+1)}}^2}$$

Nous allons utiliser (P8), (P7) iv) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n+1} u_k u_{k+1} &= \sum_{k=1}^{2n} u_k\, u_{k+1} + u_{2n+1}u_{2n+2} = {u_{2n+1}}^2 - 1 + u_{2n+1}u_{2n+2} \\ &= u_{2n+1}(u_{2n+1} + u_{2n+2}) - 1 = u_{2n+1}u_{2n+3} = {u_{(2n+1)+1}}^2 - 1 - (-1)^{(2n+1)} \\ &= u_{2n+2}^2 = {u_{2(n+1)}}^2\end{aligned}$$

(P10) Pour tout naturel non nul n :

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} (n+1-k)u_k = u_{n+4} - (n+3)}$$

<u>Preuve</u>

Posons X = {n∈ℕ*/($\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)u_k = u_{n+4} - (n+3)$)}

Si n = 1 : $\sum_{k=1}^{1}(n+1-k)u_k = u_1 = 1 = 5 - 4 = u_5 - (1+3) = u_{1+4} - (1+3)$ donc 1∈X.

Soit le naturel non nul n, supposons que n∈X, montrons que n + 1∈X :

$$\sum_{k=1}^{n+1}\big((n+1)+1-k\big)u_k = \sum_{k=1}^{n+1}(n+1-k)u_k + \sum_{k=0}^{n+1}u_k$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}\big((n+1)+1-k\big)u_k = \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)u_k + (n+1-(n+1))u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n}u_k$$

Comme n∈X alors $\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)u_k = u_{n+4}-(n+3)$ et (P1) $\sum_{k=1}^{n+1}u_k = u_{n+3}-1$ alors

$$\sum_{k=1}^{n+1}((n+1)+1-k)u_k = u_{n+4}-(n+3)+u_{n+3}-1 = u_{n+5}-(n+4)$$

$$= u_{(n+1)+4}-((n+1)+3)$$

Donc n + 1∈X donc la récurrence est prouvée donc X = ℕ* donc (P10) est vrai.

(P11) Pour tout naturel non nul n :

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} ku_k = nu_{n+2} - u_{n+3} + 2}$$

<u>Preuve</u>

Posons X = {n∈ℕ*/($\sum_{k=1}^{n} ku_k = nu_{n+2}-u_{n+3}+2$)}

Si n = 1, $\sum_{k=1}^{1} ku_k = u_1 = 1 = 1\times 2-3+2 = 1u_3-u_4+2 = 1u_{1+2}-u_{1+3}+2$ donc 1∈X

Soit n naturel non nul, supposons que n∈X, montrons que n + 1∈X :

$\sum_{k=1}^{n+1} ku_k = \sum_{k=1}^{n} ku_k + (n+1)u_{n+1}$, comme n∈X alors $\sum_{k=1}^{n} ku_k = nu_{n+2}-u_{n+3}+2$ donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} ku_k = nu_{n+2}-u_{n+3}+2+(n+1)u_{n+1} = (n+1)(u_{n+2}+u_{n+1})-u_{n+3}-u_{n+2}+2$$

$$= (n+1)u_{n+3}-(u_{n+2}+u_{n+3})+2 = (n+1)u_{n+3}-u_{n+4}+2$$

$$= (n+1)u_{(n+1)+2}-u_{(n+1)+3}+2$$

Donc n + 1 ∈X donc la récurrence est prouvée donc X = ℕ* ² donc (P11) est vrai.

(P12) <u>Formule de BINET.</u>

Pour tout naturel n non nul :

$$\boldsymbol{u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}}$$

Notons (S,+,×) l'espace vectoriel réel des suites réelles indexées sur $\mathbb{N}^*$, l'addition étant définie par :

Pour toutes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de S:

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

La multiplication scalaire étant définie par :

Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et tout réel k:

$k(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (ku_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Notons F la partie de S définie par les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: telle que:

$\forall n\in\mathbb{N}^* : u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

F est non vide car la suite de Fibonacci est dans F ;

Du paragraphe 1 :

<u>pour tout couple de réels (x_0,y_0), il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que:</u>

<u>$\forall n\in\mathbb{N}^* : u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_1 = x_0$ et $u_2 = y_0$.</u>

Donc il existe une application h de $\mathbb{R}^2$ dans F définie par :

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 : h(x,y) = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $u_1 = x$ et $u_2 = y$.

Par construction h est surjective ;

Montrons que h est injective :

Pour tous couples (x,y) et (x',y') de $\mathbb{R}^2$: si h(x,y) = h(x',y') , posons h(x,y) = $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et h(x';y')= $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, ces suites étant égales alors $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$ i.e. x = x' et y = y'

Donc (x,y) = (x',y') donc h est injective

Donc h est bijective.

Montrons que h transforme l'addition de $\mathbb{R}$ en celle de F :

Pour tous couples (x,y) et (x',y') de $\mathbb{R}^2$:

Montrons h((x,y) + (x',y')) = h(x,y) + h(x',y')

Posons h(x,y) = $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et h(x',y') = $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ alors
h(x,y) + h(x',y') = $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (u_n+ v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Et h((x,y) + (x',y')) = h(x+x',y+y')

Or u_1 = x et v_1= x' donc $u_1 + v_1$ = x + x' ; u_2 = y et v_2 = y' donc $u_2 + v_2$ = y + y'

Donc h(x+x',y+y') = $(u_n+ v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donc h((x,y) + (x',y')) = h(x,y) + h(x',y') ;

Montrons que h transforme la multiplication externe de $\mathbb{R}$ en celle de F :

Pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ et tout réel k, montrons que:

h(k(x,y)) = kh(x,y)

Posons h(x,y) = $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donc kh(x,y) = $k(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (ku_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Posons h(k(x,y)) = $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donc h(kx,ky) = $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donc v_1 = kx et v_2 = ky or ku_1 = kx et ku_2 =ky donc $(ku_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donc h(k(x,y)) = kh(x,y)

Dons h transforme la structure d'espace vectoriel réel de dimension deux de $\mathbb{R}^2$ à F donc

F est un espace vectoriel réel de dimension deux.

Cherchons une base de F :

Plus particulièrement cherchons des suites géométriques :

Soit q $\in \mathbb{R}^*$, cherchons les suites $(q^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui sont dans F;

$(q^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*} \in$ F équivaut à « $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $q^{n+2} = q^{n+1} + q^n$ » soit « $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $q^n(q^2 - q - 1) = 0$ »

Comme $q \neq 0$ cela équivaut à « $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $q^2 - q - 1 = 0$ » soit « $q^2 - q - 1 = 0$ »

Le discriminant de cette équation est $D = (-1)^2 + 4 = 5$ qui est positif donc cette équation a deux solutions réelles :

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \;\; et \;\; b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Donc $a + b = 1$ et $ab = -1$

Montrons que les deux suites $(a^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont linéairement indépendantes :

Pour tous réels x et y, supposons que $x(a^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*} + y(b^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*} = 0$, montrons que $x = y = 0$

De $x(a^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*} + y(b^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*} = 0$, on déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^* : xa^{n-1} + yb^{n-1} = 0$ donc pour $n = 1$ et $n = 2$: $x + y = 0$ et $ax + by = 0$ donc $ax - bx = 0$ donc $x(a - b) = 0$ comme $a \neq b$ donc $x = 0$ donc $y = 0$ donc $(a^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont linéairement indépendantes ; donc la partie libre $((a^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*},(b^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*})$ est une base de F car elle a le même nombre d'éléments que sa dimension.

Donc la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une combinaison linéaire de $(a^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ donc il existe des réels c et d tels que :

$\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = ca^{n-1} + db^{n-1}$

Déterminons c et d :

En particulier pour $n = 1$ et $n = 2$ cette égalité implique :

$u_1 = c + d$ et $u_2 = ca + db$ soit $c + d = 1$ et $ca + db = 1$ donc $ca + (1 - c)b = 1$ donc

$ca + b - bc = 1$ donc $c(a - b) = 1 - b$ donc

$$c = \frac{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{2-(1-\sqrt{5})}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

et

$$d = 1 - c = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

Donc

$$\boldsymbol{u_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

donc

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

(P13) Posons

$$\boldsymbol{a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \;\; et \;\; b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \text{ **donc pour tout naturel n non nul** : } \boldsymbol{u_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}}$$

Pour tout naturel n non nul : $a^{n+1} = au_{n+1} + u_n$ et $b^{n+1} = bu_{n+1} + u_n$.

Preuve

Posons X = {$n \in \mathbb{N}^*$/ ($a^{n+1} = au_{n+1} + u_n$ et $b^{n+1} = bu_{n+1} + u_n$)}

Pour n = 1 : $au_{1+1} + u_1 = au_2 + u_1 = a + 1 = a^2 = a^{1+1}$ et $bu_{1+1} + u_1 = bu_2 + u_1 = b + 1 = b^2 = b^{1+1}$ donc $1 \in X$.

Soit le naturel non nul n, supposons que $n \in X$, montrons que $n + 1 \in X$:

$a^{(n+1)+1} = a(a^{n+1})$ et $b^{(n+1)+1} = b(b^{n+1})$, comme $n \in X$ alors

$a^{n+2} = a(au_{n+1} + u_n) = a^2u_{n+1} + au_n = (a + 1)u_{n+1} + au_n = a(u_{n+1} + u_n) + u_{n+1}$

donc $a^{n+2} = au_{n+2} + u_{n+1} = au_{(n+1)+1} + u_{(n+1)}$

et $b^{n+2} = b(bu_{n+1} + u_n) = b^2u_{n+1} + bu_n = (b + 1)u_{n+1} + bu_n = b(u_{n+1} + u_n) + u_{n+1}$

donc $b^{n+2} = bu_{n+2} + u_{n+1} = bu_{(n+1)+1} + u_{(n+1)}$

donc $n + 1 \in X$ donc la récurrence est prouvée donc $X = \mathbb{N}^*$ donc (P13) est vrai.

(P14) i) Pour tout naturel non nul n, tout naturel p, 1 < p, et tout naturel q tel que $0 < q \leq p - 1$:

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} u_{pk+q} = \frac{u_{p+q} - (-1)^p u_q - u_{pn+p+q} + (-1)^p u_{pn+q}}{\left(1 + (-1)^p - (u_p + 2u_{p-1})\right)}}$$

ii) Pour tous naturels non nuls n et p :

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} u_{pk} = \frac{u_p - u_{pn+p} + (-1)^p u_{pn}}{\left(1 + (-1)^p - (u_p + 2u_{p-1})\right)}}$$

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} u_{3k} = \frac{u_{3n+2} - 1}{2} \quad et \quad \sum_{k=1}^{n} u_{4k} = \frac{u_{4n+3} + u_{4n+1} - 3}{5}}$$

<u>Preuve</u>

Pour tous naturels non nuls n et p, $1 < p$ et tout naturel q tel que $q \leq p - 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} u_{pk+q} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^{pk+q} - b^{pk+q}}{\sqrt{5}} = \frac{a^q}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{n} (a^p)^k - \frac{b^q}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{n} (b^p)^k$$

Comme $1 < p$ alors $a^p \neq 1$ et $b^p \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} u_{pk+q} = \frac{a^q a^p (1 - a^{pn})}{\sqrt{5}(1 - a^p)} - \frac{b^q b^p (1 - b^{pn})}{\sqrt{5}(1 - b^p)}$$

$$= \frac{a^{q+p}(1 - b^p)(1 - a^{pn}) - b^{q+p}(1 - a^p)(1 - b^{pn})}{\sqrt{5}(1 - a^p)(1 - b^p)}$$

$$= \frac{a^{q+p} - b^{q+p} - a^{q+p} b^p + a^p b^{q+p} - a^{pn+q+p} + b^{pn+q+p} + a^{pn+q+p} b^p - a^p b^{pn+q+p}}{\sqrt{5}(1 + (ab)^p - (a^p + b^p))}$$

$$= \frac{\sqrt{5} u_{p+q} - a^q (ab)^p + b^q (ab)^p - \sqrt{5} u_{pn+p+q} + (ab)^p \sqrt{5} u_{pn+q}}{\sqrt{5}(1 + (ab)^p - (a^p + b^p))}$$

Comme ab = - 1

i) Si $q \neq 0$ alors

$$\sum_{k=1}^{n} u_{pk+q} = \frac{\sqrt{5} u_{p+q} - (-1)^p \sqrt{5} u_q - \sqrt{5} u_{pn+p+q} + (-1)^p \sqrt{5} u_{pn+q}}{\sqrt{5}(1 + (-1)^p - (a^p + b^p))}$$

Comme $a^p = au_p + u_{p-1}$ et $b^p = bu_p + u_{p-1}$ alors $a^p + b^p = (a+b)u_p + 2u_{p-1} = u_p + 2u_{p-1}$ donc

$$\sum_{k=1}^{n} u_{pk+q} = \frac{u_{p+q} - (-1)^p u_q - u_{pn+p+q} + (-1)^p u_{pn+q}}{\left(1 + (-1)^p - (u_p + 2u_{p-1})\right)}$$

ii) Si $q = 0$ alors

$$\sum_{k=1}^{n} u_{pk} = \frac{u_p - u_{pn+p} + (-1)^p u_{pn}}{\left(1 + (-1)^p - (u_p + 2u_{p-1})\right)}$$

Pour p = 3 alors

$$\sum_{k=1}^{n} u_{3k} = \frac{u_3 - u_{3n+3} + (-1)^3 u_{3n}}{(1 + (-1)^3 - (a^3 + b^3))}$$

Comme $a^2 = a + 1$ alors $a^3 = a^2 + a = 2a + 1$ et $b^3 = 2b + 1$ donc $a^3 + b^3 = 2(a + b) + 2 = 4$ donc

$$\sum_{k=1}^{n} u_{3k} = \frac{2 - u_{3n+3} - u_{3n}}{-4} = \frac{u_{3n+2} + u_{3n+1} + u_{3n} - 2}{4} = \frac{2u_{3n+2} - 2}{4} = \frac{u_{3n+2} - 1}{2}$$

Pour p = 4

$$\sum_{k=1}^{n} u_{4k} = \frac{u_4 - u_{4n+4} + (-1)^4 u_{4n}}{(1 + (-1)^4 - (a^4 + b^4))}$$

Comme $a^3 = 2a + 1$ alors $a^4 = 2a^2 + a = 2a + 2 + a = 3a + 2$ et $b^4 = 3b + 2$ donc
$a^4 + b^4 = 3(a+b) + 4 = 7$ et $(1 + (-1)^4 - (a^4 + b^4)) = 2 - 7 = -5$

$$\sum_{k=1}^{n} u_{4k} = \frac{3 - u_{4n+4} + u_{4n}}{-5} = \frac{u_{4n+4} - u_{4n} - 3}{5} = \frac{u_{4n+3} + u_{4n+2} - u_{4n} - 3}{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} u_{4k} = \frac{u_{4n+3} + u_{4n+1} - 3}{5}$$

(P15) Pour tous naturels n et p, $2 \leq n$ et $2 \leq p$:
i) Si p est impair, notons q la partie entière de $\frac{p}{2}$ donc p = 2q + 1 alors $1 \leq q$:

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} {u_k}^p = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^{p-1}} \left(\sum_{m=0}^{q-1} \binom{p}{m} (-1)^{m+1} \frac{u_{p-2m} - (-1)^{mn} u_{(p-2m)(n+1)} - (-1)^{m(n+1)} u_{(p-2m)n}}{(u_{p-2m} + 2u_{p-2m-1})} + (-1)^{q+1} \binom{p}{q} \left(1 - (-1)^{qn} u_{n+1} - (-1)^{q(n+1)} u_n\right) \right)}$$

Pour p = 3 :

$$\sum_{k=1}^{n} {u_k}^3 = \frac{u_{3n+2} + 6(-1)^{n+1}u_{n-1} + 5}{10}$$

ii)Si p est pair :

$$\sum_{k=1}^{n} {u_k}^p = \frac{1}{\sqrt{5}^p}\left(\sum_{m=0}^{q-1}\binom{p}{m}\frac{u_{p-2m} + 2u_{p-2m-1} + (-1)^{m(n+1)}\left(u_{(p-2m)n} + 2u_{(p-2m)n-1}\right) - (-1)^{mn}\left(u_{(p-2m)(n+1)} + 2u_{(p-2m)(n+1)-1}\right) - 2(-1)^m}{2 - (-1)^m\left(u_{p-2m} + 2u_{p-2m-1}\right)} + (-1)^q\binom{p}{q}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{qk}\right)$$

Si q est pair alors $(-1)^q\binom{p}{q}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{qk} = \binom{p}{q}n$

Si q est impair et n pair alors $(-1)^q\binom{p}{q}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{qk} = 0$

Si q est impair et n est impair alors $(-1)^q\binom{p}{q}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{qk} = \binom{p}{q}$

<u>Preuve</u>

1) Si p est impair :

Notons q la partie entière de $\frac{p}{2}$ donc p = 2q + 1 :

$$\sum_{k=1}^{n} {u_k}^p = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a^k - b^k}{\sqrt{5}}\right)^p = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^p}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}a^{mk}(-1)^{p-m}b^{(p-m)k}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^p}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=0}^{q}\binom{p}{m}\left(a^{mk}(-1)^{p-m}b^{(p-m)k}\right) + \binom{p}{p-m}\left(a^{(p-m)k}(-1)^m b^{mk}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^p}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=0}^{q}(-1)^m\binom{p}{m}(ab)^{mk}\left(a^{(p-2m)k} - b^{(p-2m)k}\right)\right)$$

Or $(ab)^{mk} = (-1)^{mk}$ donc on obtient l'égalité (*)

$$\sum_{k=1}^{n} {u_k}^p = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^p}\sum_{m=0}^{q}\binom{p}{m}(-1)^m\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{mk}a^{(p-2m)k} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{mk}b^{(p-2m)k}\right)$$

Posons

$$S_n = \sqrt{5}^p \sum_{k=1}^{n} {u_k}^p$$

$$S_n = \sum_{m=0}^{q} \binom{p}{m} (-1)^m \left(\sum_{k=1}^{n} ((-1)^m a^{p-2m})^k - \sum_{k=1}^{n} ((-1)^m b^{p-2m})^k \right) =$$

$$S_n = \sum_{m=0}^{q} \binom{p}{m} (-1)^m \left((-1)^m a^{p-2m} \frac{1-(-1)^{mn} a^{(p-2m)n}}{1-(-1)^m a^{p-2m}} - (-1)^m b^{p-2m} \frac{\left(1-(-1)^{mn} b^{(p-2m)n}\right)}{1-(-1)^m b^{p-2m}} \right)$$

$$S_n = \sum_{m=0}^{q} \binom{p}{m} \frac{(a^{p-2m} - b^{p-2m}) - (-1)^{mn}\left(a^{(p-2m)(n+1)} - b^{(p-2m)(n+1)}\right) + (-1)^{m+mn}(ab)^{p-2m}\left(a^{(p-2m)n} - b^{(p-2m)n}\right)}{1 + (-1)^{p-2m} - (-1)^m (a^{p-2m} + b^{p-2m})}$$

Comme p est impair : $(ab)^{p-2m} = (-1)^{p-2m} = -1$

On remarque que pour $n = 1$ on a : $S_1 = u_1^p = 1^p = 1$

Pour $2 \leq n$ alors

$$S_n = \sqrt{5} \sum_{m=0}^{q} \binom{p}{m} \frac{u_{p-2m} - (-1)^{mn} u_{(p-2m)(n+1)} - (-1)^{m(n+1)} u_{(p-2m)n}}{(-1)^{m+1}(a^{p-2m} + b^{p-2m})}$$

$$S_n = \sqrt{5} \sum_{m=0}^{q} (-1)^{m+1} \binom{p}{m} \frac{u_{p-2m} - (-1)^{mn} u_{(p-2m)(n+1)} - (-1)^{m(n+1)} u_{(p-2m)n}}{(a^{p-2m} + b^{p-2m})}$$

Or pour $m < q$ alors $p - 2m - 1 = 2(q - m)$ donc $0 < p - 2m - 1$ donc
$a^{p-2m} + b^{p-2m} = u_{p-2m} + 2u_{p-2m-1}$;

pour $m = q$: $a^{p-2m} + b^{p-2m} = a + b = 1$ donc le dernier terme de cette somme est :

$$\binom{p}{q} (-1)^{q+1} \frac{u_{p-2q} - (-1)^{qn} u_{(p-2q)(n+1)} - (-1)^{q(n+1)} u_{(p-2q)n}}{(a^{p-2q} + b^{p-2q})}$$

$$= \binom{p}{q} (-1)^{q+1} \frac{1 - (-1)^{qn} u_{n+1} - (-1)^{q(n+1)} u_n}{1}$$

$$= (-1)^{q+1} \binom{p}{q} \left(1 - (-1)^{qn} u_{n+1} - (-1)^{q(n+1)} u_n\right)$$

Comme $1 < p$ alors $3 \leq p$ donc $1 \leq q$

$$S_n = \sqrt{5}\sum_{m=0}^{q-1}\binom{p}{m}(-1)^{m+1}\frac{u_{p-2m}-(-1)^{mn}u_{(p-2m)(n+1)}-(-1)^{m(n+1)}u_{(p-2m)n}}{(u_{p-2m}+2u_{p-2m-1})}$$
$$+(-1)^{q+1}\sqrt{5}\binom{p}{q}\left(1-(-1)^{qn}u_{n+1}-(-1)^{q(n+1)}u_n\right)$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} {u_k}^p$$
$$= \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^{p-1}}\left(\sum_{m=0}^{q-1}\binom{p}{m}(-1)^{m+1}\frac{u_{p-2m}-(-1)^{mn}u_{(p-2m)(n+1)}-(-1)^{m(n+1)}u_{(p-2m)n}}{(u_{p-2m}+2u_{p-2m-1})}\right.$$
$$\left.+(-1)^{q+1}\binom{p}{q}\left(1-(-1)^{qn}u_{n+1}-(-1)^{q(n+1)}u_n\right)\right)$$

Pour p = 3 alors q = 1 donc q – 1 = 0 et dans la somme m = 0 :

$$\sum_{k=1}^{n} {u_k}^3 = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^2}\left(-\frac{u_3-u_{3(n+1)}-u_{3n}}{u_3+2u_2}+\binom{3}{1}\left(1-(-1)^n u_{n+1}-(-1)^{(n+1)}u_n\right)\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} {u_k}^3 = \frac{1}{5}\left(-\frac{2-u_{3n+2}-u_{3n+1}-u_{3n}}{2+2\times 1}+3(1+(-1)^{n+1}(u_{n+1}-u_n)\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} {u_k}^3 = \frac{1}{5}\left(-\frac{2-2u_{3n+2}}{4}+3(1+(-1)^{n+1}(u_{n-1})\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} {u_k}^3 = \frac{u_{3n+2}-1+6+6(-1)^{n+1}u_{n-1}}{10} = \frac{u_{3n+2}+5+6(-1)^{n+1}u_{n-1}}{10}$$

2) Si p est pair, posons p = 2q et 1 ≤ q :

$$\sum_{k=1}^{n} {u_k}^p = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a^k-b^k}{\sqrt{5}}\right)^p = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^p}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}a^{mk}(-1)^{p-m}b^{(p-m)k}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^p} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{m=0}^{q-1} \binom{p}{m} \left(a^{mk}(-1)^{p-m} b^{(p-m)k}\right) + \binom{p}{p-m} \left(a^{(p-m)k}(-1)^m b^{mk}\right) + \binom{p}{q} a^{qk}(-1)^q b^{qk} \right)$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^p} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{m=0}^{q-1} \binom{p}{m} (ab)^{mk} \left((-1)^{p-m} b^{(p-2m)k} + (-1)^m a^{(p-2m)k}\right) + \binom{p}{q} (ab)^{qk}(-1)^q \right)$$

Or ab = -1 donc $(ab)^{mk} = (-1)^{mk}$ et p étant pair donc $(-1)^{p-m} = (-1)^m$ donc on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} {u_k}^p = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^p} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{m=0}^{q-1} \binom{p}{m} \left((-1)^{mk+m} (b^{(p-2m)k} + a^{(p-2m)k}\right) + \binom{p}{q} (-1)^{qk+q} \right)$$

Posons

$$S = \sqrt{5}^p \sum_{k=1}^{n} {u_k}^p$$

$$S = \sum_{m=0}^{q-1} \binom{p}{m} (-1)^m \left(\sum_{k=1}^{n} ((-1)^m a^{p-2m})^k + \sum_{k=1}^{n} ((-1)^m b^{p-2m})^k \right) + (-1)^q \binom{p}{q} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{qk}$$

$$= \sum_{m=0}^{q-1} \binom{p}{m} (-1)^m \left(\frac{(-1)^m a^{p-2m}(1-(-1)^{mn} a^{(p-2m)n})}{1-(-1)^m a^{p-2m}} + \frac{(-1)^m b^{p-2m}\left(1-(-1)^{mn} b^{(p-2m)n}\right)}{1-(-1)^m b^{p-2m}} \right) + (-1)^q \binom{p}{q} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{qk}$$

Comme p est pair $(ab)^{p-2m} = (-1)^{p-2m} = 1$

$$S = \sum_{m=0}^{q-1} \binom{p}{m} \frac{a^{p-2m} + b^{p-2m} + (-1)^{m(n+1)}(ab)^{p-2m}\left(a^{(p-2m)n} + b^{(p-2m)n}\right) - 2(-1)^m (ab)^{p-2m} - (-1)^{mn}\left(a^{(p-2m)(n+1)} + b^{(p-2m)(n+1)}\right)}{2-(-1)^m (a^{p-2m} + b^{p-2m})} + (-1)^q \binom{p}{q} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{qk}$$

Si q est pair alors $(-1)^q \binom{p}{q} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{qk} = \binom{p}{q} n$

Si q est impair et n pair alors $(-1)^q \binom{p}{q} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{qk} = 0$

Si q est impair et n est impair alors $(-1)^q \binom{p}{q} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{qk} = \binom{p}{q}$

En utilisant (P12)

$$S = \sum_{m=0}^{q-1} \binom{p}{m} \frac{u_{p-2m} + 2u_{p-2m-1} + (-1)^{m(n+1)}\left(u_{(p-2m)n} + 2u_{(p-2m)n-1}\right) - (-1)^{mn}\left(u_{(p-2m)(n+1)} + 2u_{(p-2m)(n+1)-1}\right) - 2(-1)^m}{2 - (-1)^m\left(u_{p-2m} + 2u_{p-2m-1}\right)} + (-1)^q \binom{p}{q} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{qk}$$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k{}^p = \frac{1}{\sqrt{5}^p}\left(\sum_{m=0}^{q-1} \binom{p}{m} \frac{u_{p-2m} + 2u_{p-2m-1} + (-1)^{m(n+1)}\left(u_{(p-2m)n} + 2u_{(p-2m)n-1}\right) - (-1)^{mn}\left(u_{(p-2m)(n+1)} + 2u_{(p-2m)(n+1)-1}\right) - 2(-1)^m}{2 - (-1)^m\left(u_{p-2m} + 2u_{p-2m-1}\right)} + (-1)^q \binom{p}{q} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{qk}\right)$$

(P16) Pour tout naturel non nul n, u_n est l'entier le plus proche de $\boldsymbol{\frac{a^n}{\sqrt{5}}}$.

<u>Preuve :</u>

Cela revient à dire que $\left|u_n - \frac{a^n}{\sqrt{5}}\right| < \frac{1}{2}$ soit $\left|\frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}} - \frac{a^n}{\sqrt{5}}\right| < \frac{1}{2}\ soit\ \left|\frac{b^n}{\sqrt{5}}\right| < \frac{1}{2}$

Comme $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}68\ alors\ |b| < 1 donc\ |b|^n < 1$

Donc $\left|\frac{b^n}{\sqrt{5}}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$ et la propriété est prouvée.

(P17) $\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} \left|u_n - \frac{a^n}{\sqrt{5}}\right| = 0}$

<u>Preuve :</u>

Pour tout naturel non nul n, $\left|u_n - \frac{a^n}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}} - \frac{a^n}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{b^n}{\sqrt{5}}\right| = \frac{|b|^n}{\sqrt{5}}$

Comme |b| < 0,7 alors la suite géométrique $(\ |b|^n)_{n\in\mathbb{N}*}$ a comme limite 0 donc la suite $\left(\frac{|b|^n}{\sqrt{5}}\right)_{n\in\mathbb{N}*}$ a comme limite 0 donc la suite $\left(\left|\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{\frac{a^n}{\sqrt{5}}}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}*}$ a comme limite 0 aussi.

(P18) Pour tout naturel non nul n, $\boldsymbol{\frac{a^{n-\frac{1}{n}}}{\sqrt{5}} \leq u_n \leq \frac{n+\frac{1}{n}}{\sqrt{5}}}$.

Preuve :

A) Prouvons que pour tout naturel non nul n, $\frac{a^{n-\frac{1}{n}}}{\sqrt{5}} \leq u_n$ soit $\frac{a^{n-\frac{1}{n}}}{\sqrt{5}} \leq \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$ soit

$a^{n-\frac{1}{n}} \leq a^n - b^n$ *or* $ab = -1$ *cela équivaut à* $a^{n-\frac{1}{n}} \leq a^n - \frac{(-1)^n}{a^n}$ soit

$a^{2n-\frac{1}{n}} \leq a^{2n} - (-1)^n$, comme les deux membres sont positifs, cela équivaut à

$\left(a^{2n-\frac{1}{n}}\right)^n \leq (a^{2n} - (-1)^n)^n$ soit $a^{2n^2-1} \leq (a^{2n} - (-1)^n)^n$(*)

1)Pour n impair, (*) s'écrit $a^{2n^2-1} \leq (a^{2n} + 1)^n$

Comme $2n^2 - 1 < 2n^2$ alors ($a > 0$) : $a^{2n^2-1} < a^{2n^2}$, comme $0 < a^{2n} < a^{2n} + 1$ alors $a^{2n^2} < (a^{2n} + 1)^n$
donc $a^{2n^2-1} \leq (a^{2n} + 1)^n$ est vrai pour n impair.

Montrons par récurrence sur n naturel $2 \leq n$ (pair ou impair) que $a^{2n^2-1} \leq (a^{2n} - 1)^n$

i)Pour n = 2, $a^{2n^2-1} = a^7$ *et* $(a^{2n} - (-1)^n)^n = (a^4 - (-1)^2)^2 = (a^4 - 1)^2$

Comme $a^2 = a + 1$ alors $a^4 = (a^2)^2 = (a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 = a + 1 + 2a + 1 = 3a + 2$ donc

$(a^4 – 1)^2 = (3a + 1)^2 = 9a^2 + 6a + 1 = 9a + 9 + 6a + 1 = 15a + 10$

$a^3 = a^2a = (a + 1)a = a^2 + a = a + 1 + a = 2a + 1$ donc $a^7 = a^3a^4 = (2a + 1)(3a + 2)$ donc
$a^7 = 6a^2 + 7a + 2 = 6a + 6 + 7a + 2 = 13a + 8$ comme $13a + 8 < 15a + 10$ alors
$a^{2n^2-1} \leq (a^{2n} - (-1)^n)^n$ est vrai pour n = 2.

ii)Pour n = 3, $a^{2n^2-1} = a^{17}$ *et* $(a^{2n} - 1)^n = (a^6 - 1)^3$

$a^6 = a^2a^4 = (a + 1)(3a + 2) = 3a^2 + 5a + 2 = 3a + 3 +5a + 2 = 8a + 5$ donc
$(a^6 – 1)^3 = (8a + 4)^3 = 512a^3+768a^2+384a+64 = 512(2a+1) + 768(a+1)+384a+64 =$
$2176a+1344$

$a^{17} = a^7a^7a^3 = (13a+8)^2(2a+1) = (169a^2+208a+64)(2a+1) = (377a+233)(2a+1) =$
$754a^2+843a+233 = 1597a+987$

comme $1597a+987 < 2176a+1344$ alors $a^{2n^2-1} \leq (a^{2n} - 1)^n$ est vrai pour n = 3.

Pour n naturel tel que $3 \leq n$, supposons que $a^{2n^2-1} \leq (a^{2n} - 1)^n$, montrons que

$$a^{2(n+1)^2-1} \leq \left(a^{2(n+1)} - 1\right)^{n+1}$$

$a^{2(n+1)^2-1} = a^{2n^2+4n+1} = a^{2n^2-1} \times a^{4n+2}$

$$\frac{\left(a^{2(n+1)}-1\right)^{n+1}}{(a^{2n}-1)^n}=\left(a^{2(n+1)}-1\right)\times\frac{\left(a^{2(n+1)}-1\right)^{n}}{(a^{2n}-1)^n}=\left(a^{2(n+1)}-1\right)\times\left(\frac{a^{2(n+1)}-1}{a^{2n}-1}\right)^n$$

$$=\left(a^{2(n+1)}-1\right)\times\left(\frac{a^{2(n+1)}-1}{a^{2n}-1}-a^2+a^2\right)^n$$

$$=\left(a^{2(n+1)}-1\right)\times\left(\frac{a^{2(n+1)}-1-a^{2n+2}+a^2}{a^{2n}-1}+a^2\right)^n$$

$$=\left(a^{2(n+1)}-1\right)\times\left(\frac{-1+a^2}{a^{2n}-1}+a^2\right)^n=\left(a^{2(n+1)}-1\right)\times\left(\frac{a}{a^{2n}-1}+a^2\right)^n$$

Comme a > 1 alors $\frac{a}{a^{2n}-1}>\frac{1}{a^{2n}-1}$ donc $\left(\frac{a}{a^{2n}-1}+a^2\right)^n>\left(\frac{1}{a^{2n}-1}+a^2\right)^n$ et

$$\left(\frac{1}{a^{2n}-1}+a^2\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a^2)^k\left(\frac{1}{a^{2n}-1}\right)^{n-k}\geq(a^2)^n+n(a^2)^{n-1}\times\frac{1}{a^{2n}-1}$$

$$\left(\frac{1}{a^{2n}-1}+a^2\right)^n\geq a^{2n}+n\times\frac{a^{2n-2}}{a^{2n}-1}\geq a^{2n}+n\times\frac{a^{2n-2}}{a^{2n}}=a^{2n}+\frac{n}{a^2}$$

Pour 3 ≤ n, comme a² = a + 1 ≈ 2,68 alors $\frac{n}{a^2}\geq 1$ donc

$$\left(\frac{1}{a^{2n}-1}+a^2\right)^n\geq a^{2n}+1$$

$$\frac{\left(a^{2(n+1)}-1\right)^{n+1}}{(a^{2n}-1)^n}>\left(a^{2(n+1)}-1\right)(a^{2n}+1)$$

$$\frac{\left(a^{2(n+1)}-1\right)^{n+1}}{(a^{2n}-1)^n}>a^{4n+2}-a^{2n}+a^{2n+2}-1=a^{4n+2}+a^{2n}(a^2-1)-1=\ a^{4n+2}+a^{2n+1}-1$$

Comme n > 0 alors a^{2n+1} > a > 1 donc $\frac{\left(a^{2(n+1)}-1\right)^{n+1}}{(a^{2n}-1)^n}>a^{4n+2}$ donc

$\left(a^{2(n+1)}-1\right)^{+1}>(a^{2n}-1)^n\times a^{4n+2}$ or
$a^{2(n+1)^2-1}=a^{2n^2+4n+1}=a^{2n^2-1}\times a^{4n+2}$ et par hypothèse de récurrence
$a^{2n^2-1}\leq(a^{2n}-1)^n$

Donc $a^{2(n+1)^2-1}\leq(a^{2n}-1)^n\times a^{4n+2}<\left(a^{2(n+1)}-1\right)^{n+1}$

Donc n + 1 vérifie (*) donc pour tout naturel n, 2 ≤ n , (*) est vrai

2)Donc (*) est a fortiori vrai pour tout n pair.

Donc (*) est vrai pour tout naturel n non nul et $\frac{a^{n-\frac{1}{n}}}{\sqrt{5}} \leq u_n$

B) Prouvons que pour tout naturel n, $u_n \leq \frac{a^{n+\frac{1}{n}}}{\sqrt{5}}$ soit $\frac{a^n-b^n}{\sqrt{5}} \leq \frac{a^{n+\frac{1}{n}}}{\sqrt{5}}$ soit

$a^n - b^n \leq a^{n+\frac{1}{n}}$ $or\ ab = -1\ cela$ $équivaut$ à $a^n - \frac{(-1)^n}{a^n} \leq a^{n+\frac{1}{n}}$ soit

$a^{2n} - (-1)^n \leq a^{2n+\frac{1}{n}}$, comme les deux membres sont positifs, cela équivaut à

$(a^{2n} - (-1)^n)^n \leq \left(a^{2n+\frac{1}{n}}\right)^n$ soit $(a^{2n} - (-1)^n)^n \leq a^{2n^2+1}$(*)

1)Pour n pair, (*) s'écrit $(a^{2n} - 1)^n \leq a^{2n^2+1}$

Comme $2n^2 < 2n^2 + 1$ alors (a > 0) : $a^{2n^2} < a^{2n^2+1}$, comme 1 < a alors $0 < a^{2n} - 1 < a^{2n}$ alors $(a^{2n} - 1)^n < a^{2n^2}$ donc $(a^{2n} - 1)^n < a^{2n^2+1}$ donc (*) est vrai pour n pair.

2)Pour n impair, (*) s'écrit $(a^{2n} + 1)^n \leq a^{2n^2+1}$

Montrons par récurrence que pour tout naturel n non nul : $(a^{2n} + 1)^n \leq a^{2n^2+1}$

Pour n = 1, (*) s'écrit $(a^2 + 1)^1 \leq a^3$ soit a + 2 ≤ 2a + 1 soit 1 ≤ a qui est vrai donc (*) est vrai pour n = 1.

Soit n naturel non nul supposons que $(a^{2n} + 1)^n \leq a^{2n^2+1}$ est vrai, montrons que :

$\left(a^{2(n+1)} + 1\right)^{n+1} \leq a^{2(n+1)^2+1}$ est vrai :

$$a^{2(n+1)^2+1} = a^{2n^2+4n+3} = a^{2n^2+1} \times a^{4n+2}$$

$$\frac{\left(a^{2(n+1)} + 1\right)^{n+1}}{(a^{2n} + 1)^n} = \left(a^{2(n+1)} + 1\right) \times \frac{\left(a^{2(n+1)} + 1\right)^n}{(a^{2n} + 1)^n} = \left(a^{2(n+1)} + 1\right) \times \left(\frac{a^{2(n+1)} + 1}{a^{2n} + 1}\right)^n$$

$$= \left(a^{2(n+1)} + 1\right) \times \left(\frac{a^{2(n+1)} + 1}{a^{2n} + 1} - a^2 + a^2\right)^n$$

$$= \left(a^{2(n+1)} + 1\right) \times \left(\frac{a^{2(n+1)} + 1 - a^{2n+2} - a^2}{a^{2n} + 1} + a^2\right)^n$$

$$= \left(a^{2(n+1)} + 1\right) \times \left(\frac{1 - a^2}{a^{2n} + 1} + a^2\right)^n = \left(a^{2(n+1)} + 1\right) \times \left(\frac{-a}{a^{2n} + 1} + a^2\right)^n$$

Montrons que

$$\frac{1}{a^{n+2}} < a^n - \left(a - \frac{1}{a^{2n} + 1}\right)^n$$

Posons $x = a - \frac{1}{a^{2n}+1}$ alors

$$a^n - \left(a - \frac{1}{a^{2n}+1}\right)^n = \left(x + \frac{1}{a^{2n}+1}\right)^n - x^n = \frac{1}{a^{2n}+1} \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-k-1}\right)$$

Donc

$$a^n - \left(a - \frac{1}{a^{2n}+1}\right)^n > \frac{1}{a^{2n}+1} \times a^{n-1}$$

Montrons que

$$\frac{1}{a^{2n}+1} \times a^{n-1} > \frac{1}{a^{n+2}}$$

Cela équivaut à $a^{2n} + 1 < a^{2n+1}$ soit $1 < a^{2n}(a-1)$ or pour $1 \leq n$: $a^2 \leq a^{2n}$ donc $a^2(a-1) < a^{2n}(a-1)$ donc $(a+1)(a-1) < a^{2n}(a-1)$ donc $a^2 - 1 < a^{2n}(a-1)$ comme $2 < a^2$ alors $1 < a^{2n}(a-1)$ donc

$$\frac{1}{a^{2n}+1} \times a^{n-1} > \frac{1}{a^{n+2}}$$

Donc

$$a^n - \left(a - \frac{1}{a^{2n}+1}\right)^n > \frac{1}{a^{n+2}} \ donc \ \left(a - \frac{1}{a^{2n}+1}\right)^n < a^n - \frac{1}{a^{n+2}}$$

$$a^n \times \left(a - \frac{1}{a^{2n}+1}\right)^n < a^n \times \left(a^n - \frac{1}{a^{n+2}}\right) \ donc \ \left(a^2 - \frac{a}{a^{2n}+1}\right)^n < a^{2n} - \frac{1}{a^2}$$

$$\left(a^{2(n+1)} + 1\right) \times \left(a^2 - \frac{a}{a^{2n}+1}\right)^n < \left(a^{2(n+1)} + 1\right) \times \left(a^{2n} - \frac{1}{a^2}\right)$$

$$donc \ \frac{\left(a^{2(n+1)}+1\right)^{n+1}}{(a^{2n}+1)^n} < \left(a^{2(n+1)} + 1\right) \times \left(a^{2n} - \frac{1}{a^2}\right)$$

$$donc \ \frac{\left(a^{2(n+1)}+1\right)^{n+1}}{(a^{2n}+1)^n} < a^{4n+2} + a^{2n} - a^{2n} - \frac{1}{a^2}$$

$$donc \ \frac{\left(a^{2(n+1)}+1\right)^{n+1}}{(a^{2n}+1)^n} < a^{4n+2} - \frac{1}{a^2} \ donc \ \frac{\left(a^{2(n+1)}+1\right)^{n+1}}{(a^{2n}+1)^n} < a^{4n+2}$$

$$\left(a^{2(n+1)}+1\right)^{n+1} < (a^{2n}+1)^n \times a^{4n+2}$$

De l’hypothèse de récurrence :

$$(a^{2n}+1)^n \leq a^{2n^2+1}\ donc\ (a^{2(n+1)}+1)^{n+1} < a^{2n^2+1}\times a^{4n+2}$$

$$\left(a^{2(n+1)}+1\right)^{n+1} < a^{2(n+1)^2+1}$$

Donc pour n + 1 (*) est vrai donc (*) est vrai pour tout n naturel non nul donc a fortiori pour tout n naturel impair donc

pour tout naturel non nul n, $u_n \leq \frac{a^{n+\frac{1}{n}}}{\sqrt{5}}\ donc\ \frac{a^{n-\frac{1}{n}}}{\sqrt{5}} \leq u_n \leq \frac{a^{n+\frac{1}{n}}}{\sqrt{5}}$

(P19) Pour tout réel x et tout naturel non nul n, posons $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k x^k$:
i) Pour tout naturel non nul n et tout réel x distinct de - a et de - b :

$$s_n(x)=\frac{-u_n x^{n+2}-u_{n+1}x^{n+1}+x}{-x^2-x+1}$$

$s_n(1)=u_{n+2}-1\ et\ pour\ 1<n, s_n(-1)=(-1)^n u_{n-1}-1$ et $s_1(-1) = -1$.
ii) Pour tout naturel n

$$s_n(-a)=\frac{1+\sqrt{5}}{10}(-a^2)^n-\frac{1+\sqrt{5}}{10}-\frac{n}{\sqrt{5}}$$

$$s_n(-b)=\frac{n}{\sqrt{5}}+\frac{1-\sqrt{5}}{10}(-b^2)^n+\frac{\sqrt{5}-1}{10}$$

iii)Pour x réel fixé tel que |x| < |b| alors la suite $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ a comme limite quand n tend vers +∞ $\frac{x}{1-x-x^2}$

<u>Preuve :</u>

i)Remarquons que pour tout réel x, $s_1(x) = x$ et $s_2(x) = x + x^2$.

Pour tout naturel non nul n et tout réel x :

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a^k-b^k}{\sqrt{5}}\right)x^k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k=1}^{n}(ax)^k-\sum_{k=1}^{n}(bx)^k\right)$$

Si ax ≠ 1 et bx ≠ 1 i.e. x ≠ -b et x ≠ -a alors

$$s_n(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{ax((ax)^n-1)}{ax-1}-\frac{bx((bx)^n-1)}{bx-1}\right)$$

$$s_n(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{ba^{n+1}x^{n+2}-a^{n+1}x^{n+1}-abx+ax-ab^{n+1}x^{n+2}+b^{n+1}x^{n+1}+abx-bx}{abx^2-(a+b)x+1}\right)$$

Comme ab = -1, a + b = 1 et a – b = $\sqrt{5}$

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{abx^{n+2}(a^n - b^n) - x^{n+1}(a^{n+1} - b^{n+1}) + (a-b)x}{-x^2 - x + 1}\right)$$

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-x^{n+2}\sqrt{5}u_n - x^{n+1}\sqrt{5}u_{n+1} + x\sqrt{5}}{-x^2 - x + 1}\right)$$

$$s_n(x) = \left(\frac{-x^{n+2}u_n - x^{n+1}u_{n+1} + x}{-x^2 - x + 1}\right)$$

$s_n(1) = \frac{-u_n - u_{n+1} + 1}{-1-1+1} = (u_n + u_{n+1}) - 1 = u_{n+2} - 1$

Pour 1 < n :

$$s_n(-1) = \left(\frac{-(-1)^{n+2}u_n - (-1)^{n+1}u_{n+1} - 1}{-(-1)^2 - (-1) + 1}\right) = (-1)^n(-u_n + u_{n+1}) - 1)$$
$$= (-1)^n u_{n-1} - 1$$

$s_1(-1) = -u_1 = -1.$

ii)Pour x = - a alors bx = 1 donc

$$s_n(-a) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-a^2((-a^2)^n - 1)}{-a^2 - 1} - n\right)$$

$$s_n(-a) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{a^2(-a^2)^n - a^2}{a^2 + 1} - n\right)$$

Comme $a^2 = a + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ alors $a^2 + 1 = a + 2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

$$\frac{a^2}{a^2+1} = \frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{25-5} = \frac{10+2\sqrt{5}}{20} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

$$s_n(-a) = \frac{5+\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}(-a^2)^n - \frac{5+\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} - \frac{n}{\sqrt{5}}$$

$$s_n(-a) = \frac{1+\sqrt{5}}{10}(-a^2)^n - \frac{1+\sqrt{5}}{10} - \frac{n}{\sqrt{5}}$$

Pour x = - b alors ax = 1

$$s_n(-b) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(n - \frac{-b^2((-b^2)^n - 1)}{-b^2 - 1}\right)$$

$$s_n(-b) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(n - \frac{b^2((-b^2)^n - 1)}{b^2 + 1}\right)$$

Comme b² = b + 1 = $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ alors b² + 1 = b + 2 = $\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$

$$\frac{b^2}{b^2+1} = \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{25-5} = \frac{10-2\sqrt{5}}{20} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

$$s_n(-b) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times n - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{5-\sqrt{5}}{10}(-b^2)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

$$s_n(-b) = \frac{n}{\sqrt{5}} + \frac{1-\sqrt{5}}{10}(-b^2)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{10}$$

iii)Pour x réel tel que |x| < |b| alors |ax| < |ab| donc |ax| < 1, comme |b| < |a| alors |bx| < 1 donc les sommes $\sum_{k=1}^{n}(ax)^k \; et \sum_{k=1}^{n}(bx)^k$ ont une limite quand n tend vers +∞ qui sont respectivement : $\frac{-ax}{ax-1}\, et\, \frac{-bx}{bx-1}$ donc $s_n(x)$ a comme limite :

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-ax}{ax-1} - \frac{-bx}{bx-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{-abx+ax-abx-bx}{abx^2-(a+b)x+1} = \frac{x}{1-x-x^2}$$

Sachant que ab = -1, a – b = $\sqrt{5}$ et a + b = 1.

(P20) Pour tous naturels non nuls n et m : si n divise m alors u_n divise u_m.

<u>Preuve :</u>

Pour tout naturel non nul n, posons $X_n = \{q\in\mathbb{N}^*/(u_n \text{ divise } u_{qn})\}$,

Comme $u_1 = 1$ alors pour tout naturel non nul q, u_1 divise u_{qn} donc $X_1 = \mathbb{N}^*$.

Si 2 ≤ n, pour q = 1, $u_{qn} = u_n$ donc u_{qn} divise u_n donc $1\in X_n$, soit q un naturel non nul, supposons que $q\in X_n$, montrons que $q + 1\in X_n$:

de (P6) avec h = n et comme 2 ≤ n et 1 ≤ q alors 2 ≤ nq donc 1 ≤ nq – 1, posons k = nq – 1 alors $u_nu_{nq-1} + u_{n+1}u_{nq} = u_{n+nq-1+1} = u_{n(q+1)}$, comme u_n divise u_n et que $q\in X$ donc u_n divise u_{nq} alors u_n divise $u_{n(q+1)}$ donc $q + 1\in X_n$ donc la récurrence est prouvée et $X_n = \mathbb{N}^*$ donc pour tous naturels non nuls n et q : u_n divise u_{nq}.

Soient n et m des naturels non nuls tels que n divise m alors il existe un naturel non nul q tel que m = nq de ce qui précède on déduit que u_n divise u_{nq} donc u_n divise u_m.

(P21) Pour tout naturel non nul n, il existe un naturel m tel que :
$1 \leq m \leq n^2 + 1$ et n divise u_m.

Preuve :

Rappelons que nous notons s la surjection canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui est un morphisme de groupes pour les additions ;

Posons $X = \{(s(u_p),s(u_{p+1}))/(p\in\mathbb{N}^*)\}$, Comme $\text{Card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n$ alors $\text{Card}(X) \leq n^2$ posons $Y = \{(s(u_p),s(u_{p+1}))/(p\in\mathbb{N}\cap[1,n^2+1])\}$alors $Y \subset X$ donc $\text{card}(Y) \leq n^2$; si tous les couples de Y étaient distincts alors $\text{Card}(Y) = n^2 + 1$ ce qui est impossible donc il existe p et q naturels distincts de $[1,n^2+1]$ tels que $(s(u_p),s(u_{p+1})) = (s(u_q),s(u_{q+1}))$ donc $s(u_p) = s(u_q)$ et $s(u_{p+1}) = s(u_{q+1})$, comme p et q sont distincts, pour fixer les idées supposons $p < q$:

Posons $A = \{k\in\mathbb{N}/(\exists h\in\mathbb{N}^*\cap]k,n^2+1])(s(u_k),s(u_{k+1})) = (s(u_h),s(u_{h+1}))\}$ alors $p\in A$ donc A est non vide donc possède un plus petit élément w donc il existe z naturel tel que $w < z \leq n^2 + 1$ tel que $s(u_w) = s(u_z)$ et $s(u_{w+1}) = s(u_{z+1})$;

Supposons que $w \neq 1$ alors $2 \leq w < z$ donc $u_{w-1} = u_{w+1} - u_w$ et $u_{z-1} = u_{z+1} - u_z$, s étant un morphisme pour l'addition, $s(u_{w-1}) = s(u_{w+1}) - s(u_w)$ et $s(u_{z-1}) = s(u_{z+1}) - s(u_z)$ donc $s(u_{w-1}) = s(u_{z-1})$ donc $(s(u_{w-1}),s(u_w)) = (s(u_{z-1}),s(u_z))$ comme $w - 1 < z - 1$ alors $w - 1 \in A$ donc $w < w - 1$ car w est le plus élément de A, c'est impossible donc $w = 1$ et il existe un naturel z tel que $1 < z \leq n^2 + 1$ et $(s(u_1),s(u_2)) = (s(u_z),s(u_{z+1}))$ or $s(u_1) = s(1) = 1$ et $s(u_2) = s(1) = 1$ donc $s(u_z) = s(u_{z+1})$ donc $s(u_{z+1} - u_z) = 0$ (s morphisme !) donc n divise $u_{z+1} - u_z$ or $1 < z$ donc $u_{z+1} - u_z = u_{z-1}$ donc n divise u_{z-1}, posons $m = z - 1$ donc n divise u_m.

(P22) <u>Congruences des termes de la suite et critères de divisibilité.</u>

Ci-dessous nous donnons les congruences du terme u_m modulo n tel que n soit premier ou carré, en fonction des congruences de m :

i)

m mod 3	**0**	**1**	**2**
u_m mod 2	**0**	**1**	**1**

Donc « u_m est pair » si et seulement si « 3 divise m ».

ii)

m mod 8	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
u_m mod 3	**0**	**1**	**1**	**2**	**0**	**2**	**2**	**1**

Donc « 3 divise u_m » si et seulement si « 4 divise m ».

iii)

m mod 6	0	1	2	3	4	5
u_m mod 4	0	1	1	2	3	1

Donc « 4 divise u_m » si et seulement si « 6 divise m ».

iv)

m mod 5	0	1	2	3	4
u_m mod 5	0	1	1	2	3

Donc « 5 divise u_m » si et seulement si « 5 divise m ».

v)

m mod 16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_m mod 7	0	1	1	2	3	5	1	6	0	6	6	5	4	2	6	1

Donc « 7 divise u_m » si et seulement si « 8 divise m ».

vi)

m mod 12	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_m mod 8	0	1	1	2	3	5	0	5	5	2	7	1

Donc « 8 divise u_m » si et seulement si « 6 divise m ».

vii)

m mod 24	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
u_m mod 9	0	1	1	2	3	5	8	4	3	7	1	8	0	8	8	7	6	4	1	5	6	2	8	1

Donc « 9 divise u_m » si et seulement si « 12 divise m ».

viii)

m mod 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_m mod 11	0	1	1	2	3	5	8	2	10	1

Donc « 11 divise u_m » si et seulement si « 10 divise m ».

ix)

m mod 28	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_m mod 13	0	1	1	2	3	5	8	0	8	8	3	11	1

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
12	0	12	12	11	10	8	5	0	5	5	10	2	12	1

Donc « 13 divise u_m » si et seulement si « 7 divise m ».

x)

m mod 36	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_m mod 17	0	1	1	2	3	5	8	13	4	0	4	4

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
8	12	3	15	1	16	0	16	16	15	14	12

24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
9	4	13	0	13	13	9	5	14	2	16	1

Donc « 17 divise u_m » si et seulement si « 9 divise m ».

Preuve :

De (P21), il suffit de trouver l'entier z tel que u_z et u_{z+1} soient congrus à 1 modulo n alors u_{z-1} est congru à 0 modulo n et m est étudié modulo z, la lecture des congruences des tableaux donnent les cas pour lesquels la congruence modulo n de u_m est 0.

La lecture de ces tableaux permet de prouver par exemple qu'il n'existe pas de terme u_m impair divisible par 17 : s'il en existait alors 9 diviserait m et 3 ne diviserait pas m ce qui est impossible. De même si u_m est multiple de 4 alors il est multiple de 8 car les deux sont équivalentes à m multiple de 6. D'autres « joyeusetés » peuvent être trouvées !

(P23) i) Pour tout naturel non nul n : si n n'est pas premier alors u_n n'est pas premier.
ii) Pour tout naturel non nul n : si u_n est premier alors n est premier.

Preuve :

i)Si n n'est pas premier alors il existe des naturels a et b tels que $2 \leq a$, $2 \leq b$ et $n = ab$ donc $4 \leq n$ appliquons (P19) comme a divise n donc u_a divise u_n, si u_n était premier alors $u_n = u_a$, la suite de Fibonacci étant strictement croissante à partir du rang 2 et $2 \leq a$, $4 \leq n$ alors $n = a$ donc on aurait $ab = a$ donc $ab = a$, comme a est non nul alors on aurait $b = 1$ or $2 \leq b$ c'est impossible donc u_n n'est pas premier.

ii)Par contraposée de i) si u_n est premier alors n est premier.

(P24) i) Pour tout naturel non nul n : $\text{pgcd}(u_n,u_{n+1}) = 1$.
ii) Pour tous naturels n et q : $2 \leq n$ et $1 \leq q$: $\text{pgcd}(u_n,u_{nq-1}) = 1$.

Preuve :

i)Posons $X = \{n\in\mathbb{N}^*/(\forall q\in\mathbb{N}\cap[1,n])\ (\text{pgcd}(u_q,u_{q+1}) = 1)\}$

Pour $n = 1$, $q = 1$ et $\text{pgcd}(u_1,u_2) = \text{pgcd}(1,1) = 1$ donc $1\in X$;

Soit le naturel non nul n, supposons que $n\in X$, montrons que $n + 1\in X$:

$\forall q\in\mathbb{N}\cap[1,n+1]$: si $q < n + 1$ alors comme $n\in X$: $\text{pgcd}(u_q,u_{q+1}) = 1$

Utilisons la propriété : soient a, b entiers non nuls : $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(a,b-a)$: (1.5.3.10vi)

$\text{pgcd}(u_{n+1},u_{n+2}) = \text{pgcd}(u_{n+1},u_n + u_{n+1}) = \text{pgcd}(u_{n+1},u_n + u_{n+1}- u_{n+1}) = \text{pgcd}(u_{n+1},u_n) = 1$

donc $\forall q\in\mathbb{N}^*\cap[1,n+1]$ $\text{pgcd}(u_q,u_{q+1}) = 1$donc $n + 1\in X$ donc la récurrence est prouvée donc $X = \mathbb{N}^*$ donc pour tout naturel non nul n : $\text{pgcd}(u_n,u_{n+1}) = 1$.

ii)Posons pour tout naturel n tel que $2 \leq n$: $Y = \{q\in\mathbb{N}^*/(\text{pgcd}(u_n,u_{nq-1}) = 1)\}$

pour $n = 2$, $u_2 = 1$ donc $\text{pgcd}(u_2,u_{2q-1}) = 1$

pour $3 \leq n$:

Pour $q = 1$: $\text{pgcd}(u_n,u_{n-1}) = 1$ de i) donc $1\in Y$,

Pour $q = 2$: comme $2 \leq n$, appliquons (P6) : $u_nu_{n-2} + u_{n+1}u_{n-1} = u_{2n-1}$

Soit d diviseur commun à u_n et u_{2n-1} alors d divise u_nu_{n-2} et u_{2n-1} donc d divise $u_{2n-1} - u_nu_{n-2}$ donc d divise $u_{n+1}u_{n-1}$.

Réciproquement si d divise u_n et $u_{n+1}u_{n-1}$ alors comme d divise u_nu_{n-2} donc d divise $u_nu_{n-2} + u_{n+1}u_{n-1}$ donc d divise u_{2n-1} donc les diviseurs communs à « u_n et u_{2n-1} » et à « u_n et $u_nu_{n-2} + u_{n+1}u_{n-1}$ » sont les mêmes donc $\text{pgcd}(u_n,u_{2n-1}) = \text{pgcd}(u_n,u_{n+1}u_{n-1})$.

Comme $\text{pgcd}(u_n,u_{n-1}) = 1$ (de ce qui précède) donc $\text{pgcd}(u_n, u_{n+1}u_{n-1}) = \text{pgcd}(u_n, u_{n+1}) = 1$ donc $\text{pgcd}(u_n,u_{2n-1}) = 1$ donc $2 \in Y$.

Soit le naturel q tel que $2 \leq q$, supposons que $q \in Y$, montrons que $q + 1 \in Y$:

appliquons (P6) : $u_{nq-1}u_{n-1} + u_{nq}u_n = u_{nq-1+n-1+1} = u_{n(q+1)-1}$

Soit d diviseur commun à u_n et $u_{n(+1)-1}$ alors d divise u_nu_{nq} et $u_{n(q+1)-1}$ donc d divise $u_{n(q+1)-1} - u_{nq}u_n$ donc d divise $u_{nq-1}u_{n-1}$ donc d divise u_n et $u_{nq-1}u_{n-1}$.

Réciproquement si d divise u_n et $u_{nq-1}u_{n-1}$ alors d divise u_nu_{nq} donc d divise $u_{nq-1}u_{n-1} + u_{nq}u_n$ donc d divise $u_{n(q+1)-1}$ donc d divise u_n et $u_{n(q+1)-1}$.

donc les diviseurs communs à « u_n et $u_{n(q+1)-1}$ » et à « u_n et $u_{nq-1}u_{n-1}$.» sont les mêmes donc $\text{pgcd}(u_n,u_{n(q+1)-1}) = \text{pgcd}(u_n,u_{nq-1}u_{n-1})$.

Utilisons la propriété suivante : soient a, b et c entiers non nuls : si $\text{pgcd}(a,c) = 1$ alors $\text{pgcd}(a,bc) = \text{pgcd}(a,b)$ (Théorème de Gauss 1.5.3.12)

Comme $\text{pgcd}(u_n,u_{n-1}) = 1$ (voir i) donc $\text{pgcd}(u_n,u_{nq-1}u_{n-1}) = \text{pgcd}(u_n,u_{nq-1})$ comme $q \in Y$ alors $\text{pgcd}(u_n,u_{nq-1}) = 1$ donc $\text{pgcd}(u_n,u_{n(q+1)-1}) = 1$ donc $q + 1 \in Y$ donc la récurrence est prouvée donc $Y = \mathbb{N}^*$ et pour tous naturels n et q : $2 \leq n$ et $1 \leq q$: $\text{pgcd}(u_n,u_{nq-1}) = 1$.

(P25) Pour tous naturels non nuls n et m : $\text{pgcd}(u_n,u_m) = u_{\text{pgcd}(n,m)}$.

<u>Preuve :</u>

Si n = m alors $\text{pgcd}(u_n,u_m) = u_n = u_{\text{pgcd}(n,n)}$.

Si n = 1 alors $u_1 = 1$ donc $\text{pgcd}(u_1,u_m) = 1$ et $u_{\text{pgcd}(1,m)} = u_1 = 1$ donc $\text{pgcd}(u_1,u_m) = u_{\text{pgcd}(1,m)}$

Si $n \neq m$ et $n \neq 1$ pour fixer les idées, supposons que $n < m$:

Effectuons la division euclidienne de m par n : il existe q_1 et r_1 entiers tels que :

$m = nq_1 + r_1$ et $0 \leq r_1 < n$ alors $q_1 \neq 0$ sinon on aurait $r_1 = m$ donc $m < n$.

comme $n \neq 1$ et $q_1 \neq 1$ alors $2 \leq n$ et $2 \leq q_1$ alors $4 \leq nq_1$ donc $1 \leq nq_1 - 1$

De (P6) avec $h = nq_1 - 1$ et $k = r_1$: $u_{nq1-1}u_{r1} + u_{nq1}u_{r1+1} = u_{nq1+r1} = u_m$ donc

$\text{pgcd}(u_m,u_n) = \text{pgcd}(u_{nq1-1}u_{r1} + u_{nq1}u_{r1+1},u_n)$

Utilisons la propriété : soient a, b entiers non nuls : pgcd(a,b) = pgcd(a,b-a) = pgcd(a,a + b). (1.5.3.10vi)

Soit d un diviseur commun de u_n et $u_{nq1-1}u_{r1} + u_{nq1}u_{r1+1}$ comme n divise nq_1 alors u_n divise u_{nq1} alors d divise u_{nq1}donc d divise $u_{nq1}u_{r1+1}$ donc d divise $u_{nq1-1}u_{r1} + u_{nq1}u_{r1+1} - u_{nq1}u_{r1+1}$ donc d divise $u_{nq1-1}u_{r1}$ donc d est un diviseur commun à u_n et $u_{nq1-1}u_{r1}$.

Réciproquement si d est un diviseur commun à u_n et $u_{nq1-1}u_{r1}$ .comme n divise nq_1 alors u_n divise u_{nq1} alors d divise u_{nq1}donc d divise $u_{nq1}u_{r1+1}$ donc d divise $u_{nq1-1}u_{r1} + u_{nq1}u_{r1+1}$ donc d est un diviseur commun de u_n et $u_{nq1-1}u_{r1} + u_{nq1}u_{r1+1}$ donc les diviseurs communs à «u_n et $u_{nq1-1}u_{r1}$» sont les mêmes que ceux de « u_n et $u_{nq1-1}u_{r1} + u_{nq1}u_{r1+1}$» donc

$\text{pgcd}(u_m,u_n) = \text{pgcd}(u_{nq1-1}u_{r1} + u_{nq1}u_{r1+1},u_n) = \text{pgcd}(u_n,u_{nq1-1}u_{r1})$

De (P24) : comme $\text{pgcd}(u_n,u_{nq1-1}) = 1$ alors utilisons la propriété suivante : soient a, b et c entiers non nuls : si pgcd(a,c) = 1 alors pgcd(a,bc) = pgcd(a,b) :

$\text{pgcd}(u_n,u_{nq1-1}u_{r1}) = \text{pgcd}(u_n,u_{r1}))$ donc $\text{pgcd}(u_m,u_n) = \text{pgcd}(u_n,u_{r1})$

Ainsi si $m = nq_1 + r_1$ et $0 \leq r_1 < n$ alors $\text{pgcd}(u_m,u_n) = \text{pgcd}(u_n,u_{r1})$

De même effectuons la division euclidienne de n par r_1 dont le reste est r_2 : $0 \leq r_2 < r_1$ donc $\text{pgcd}(u_n,u_{r1}) = \text{pgcd}(u_{r1},u_{r2})$.

On construit ainsi une suite de restes : $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en posant $r_0 = u_n$ telle que pour tout k de $\mathbb{N}$: r_{k+2} est le reste de la division euclidienne de r_k par r_{k+1} si r_{k+1} est non nul donc $0 \leq r_{(k+2)} < r_{(k+1)}$ cette construction est appelée « algorithme d'Euclide », alors le raisonnement précédent s'applique donc $\text{pgcd}(u_{rk},u_{r(k+1)}) = \text{pgcd}(u_{r(k+1)},u_{r(k+2)})$ et donc

$\text{pgcd}(u_m,u_n) = \text{pgcd}(u_n,u_{r1}) = \text{pgcd}(u_{r1},u_{r2}) = \text{pgcd}(u_{rk},u_{r(k+1)}) = \text{pgcd}(u_{r(k+1)},u_{r(k+2)})$

i) Si $r_1 = 0$ alors n divise m donc u_n divise u_m donc $\text{pgcd}(u_m,u_n) = u_n = u_{\text{pgcd}(n,m)}$.
ii) Sinon la suite des restes est strictement décroissante et ces restes sont des entiers naturels donc il existe un indice p, $2 \leq p$ tel que $r_p = 0$ donc r_{p-1} divise r_{p-2} donc $\text{pgcd}(r_{p-2},r_{p-1}) = r_{p-1}$ et $\text{pgcd}(u_m,u_n) = \text{pgcd}(u_{r(p-2)},u_{r(p-1)})$ comme r_{p-1} divise r_{p-2} alors $u_{r(p-1)}$ divise $u_{r(p-2)}$ donc $\text{pgcd}(u_{r(p-2)},u_{r(p-1)}) = u_{r(p-1)} = u_{\text{pgcd}(r(p-1),r(p-2))}$

Cet algorithme d'Euclide prouve que :
$\text{pgcd}(m,n) = \text{pgcd}(n,r_1) = \text{pgcd}(r_k,r_{k+1}) = \text{pgcd}(r_{p-2},r_{p-1}) = r_{p-1}$ donc $\text{pgcd}(u_m,u_n) = u_{\text{pgcd}(n,m)}$.

(P26) Soient les naturels n et m de $\mathbb{N}$ - {0 ;1}, il y a équivalence entre :
i) n divise m.
ii) u_n divise u_m.

<u>Preuve :</u>

i)⇒ii)

C'est la propriété (P20).

ii)⇒i)

Si u_n divise u_m alors pgcd(u_m,u_n) = u_n or pgcd(u_m,u_n) = $u_{pgcd(n,m)}$ donc $u_{pgcd(n,m)}$ = u_n,
comme 2 ≤ n et 2 ≤ m et que la suite de Fibonacci est strictement croissante à partir du rang 2 alors pgcd(n,m) = n donc n divise m.

(P27) Soit n naturel, tous les diviseurs impairs de u_{2n+1} sont congrus à 1 modulo 4.

Preuve :

De (P7iv) : $u_{2n+1}^2 = u_{2n}u_{2n+2} + (-1)^{2n}$ donc $u_{2n+1}^2 = u_{2n}u_{2n+2} + 1$ donc
$-1 = u_{2n}u_{2n+2} - u_{2n+1}^2 = u_{2n}(u_{2n} + u_{2n+1}) - u_{2n+1}^2 = u_{2n}^2 - u_{2n}u_{2n+1} - u_{2n+1}^2$ donc
$u_{2n}u_{2n+1} + u_{2n+1}^2 = u_{2n}^2 + 1$; soit p un diviseur premier impair de u_{2n+1} alors
p divise $u_{2n}u_{2n+1} + u_{2n+1}^2$ donc p divise $u_{2n}^2 + 1$;

Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: p – 1 étant pair, $\frac{p-1}{2}$ est un entier, $u_{2n}^2 + 1 \equiv 0$ donc $u_{2n}^2 \equiv -1$ donc
$(u_{2n}^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}\ donc\ u_{2n}^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ de (P24i) u_{2n} et u_{2n+1} sont premiers entre eux donc p ne peut pas diviser u_{2n} ;

En appliquant le petit théorème de Fermat : comme p ne divise pas u_{2n} alors $u_{2n}^{p-1} \equiv 1$ donc
$1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ donc $1 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ donc $\frac{p-1}{2}$ est un entier pair donc il existe un entier k tel que
$\frac{p-1}{2}$ = 2k donc p – 1 = 4k donc p = 4k + 1 donc p est congru à 1 modulo 4.

Donc tous les diviseurs premiers impairs de u_{2n+1} sont congrus à 1 modulo 4.

Soit d un diviseur impair de u_{2n+1}, pour tout diviseur premier p de d, si p = 2 alors 2 divise d et d est pair ce qui n'est pas donc p est impair donc d est produit de diviseurs premiers impairs donc d est congru (mod 4) au produit des congruences de ses diviseurs premiers impairs qui sont tous égaux à 1 donc le produit est 1 donc d est congru à 1 modulo 4.

(P28) Soit p un nombre premier impair :
i) Si p est congru à 1 ou -1 modulo 5 alors p divise u_{p-1}.
ii) Si p est congru à 2 ou -2 modulo 5 alors p divise u_{p+1}.

Preuve :

i)Utilisons la formule de Binet :

$$u_{p-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{p-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{p-1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1-k}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1-k}\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right)$$

$$u_{p-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}\left(\sqrt{5}\right)^{k}-\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}(-1)^{k}\left(\sqrt{5}\right)^{k}\right)$$

$$u_{p-1}=\frac{1}{2^{p-1}\sqrt{5}}\left(\sum_{k=1,k\ impair}^{p-1}\binom{p-1}{k}2\times\left(\sqrt{5}\right)^{k}\right)$$

Posons k = 2q + 1 alors 2q + 1 varie de 1 à p – 1 donc q varie de 0 à $\frac{p-3}{2}$ donc

$$u_{p-1}=\frac{1}{2^{p-2}\sqrt{5}}\left(\sum_{q=0}^{(p-3)/2}\binom{p-1}{2q+1}\left(\sqrt{5}\right)^{2q+1}\right)=\frac{1}{2^{p-2}}\left(\sum_{q=0}^{(p-3)/2}\binom{p-1}{2q+1}5^{q}\right)$$

$$2^{p-2}u_{p-1}=\sum_{q=0}^{(p-3)/2}\binom{p-1}{2q+1}5^{q}$$

Utilisons la propriété :
pour tout nombre premier p impair, pour tout entier k de [0,p-1] : $\binom{p-1}{k}\equiv(-1)^{k}\ (modulo\ p)$

Dans ℤ/pℤ :

$$2^{p-2}u_{p-1}\equiv-\sum_{q=0}^{(p-3)/2}5^{q}$$

or

$$\sum_{q=0}^{(p-3)/2}5^{q}=\frac{5^{\frac{p-3}{2}+1}-1}{5-1}=\frac{5^{\frac{p-1}{2}}-1}{4}$$

Donc

$2^{p-2}u_{p-1}\equiv\frac{5^{\frac{p-1}{2}}-1}{4}$ donc $2^{p}u_{p-1}\equiv5^{\frac{p-1}{2}}-1$

Du petit théorème de Fermat : $2^{p-1}\equiv 1$ (mod p) donc $2u_{p-1}\equiv5^{\frac{p-1}{2}}-1$

Comme $5^{\frac{p-1}{2}}-1$ est un entier pair (dans ℤ/2ℤ : 5≡1 donc $5^{\frac{p-1}{2}}-1\equiv 1^{(p-1)/2}-1\equiv 1-1\equiv 0$)
donc $\frac{5^{\frac{p-1}{2}}-1}{2}$ est un entier N et $2u_{p-1}\equiv2\times\frac{5^{\frac{p-1}{2}}-1}{2}$, comme p est premier alors (ℤ/pℤ ,+,×) est un corps donc on peut simplifier par 2 (2 < p) donc $u_{p-1}\equiv\frac{5^{\frac{p-1}{2}}-1}{2}$ (mod p).

i)a) Si p est congru à 1 modulo 5 alors il existe un naturel a tel que p = 5a + 1, si a est impair alors p est pair et premier or 2 < p c'est impossible donc a est impair donc il existe un naturel q non nul tel que a = 2q donc p = 5(2q)+ 1 = 10q + 1 donc p – 1 = 10q donc $\frac{p-1}{2} = 5q$.

Soit s la surjection canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, morphisme pour les additions et pour les multiplications, donc s(p) = 0, notons A(1) = {s(k)/k∈[1,5q]∩ℕ} et
A(-1) = s(k)/k∈[-5q,-1]∩ℕ} alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ = {s(0)} ∪ A(1) ∪ A(-1).

Pour tout naturel t de [0,4], notons I(t) = [tq+1,(t+1)q]∩ℕ alors [1,5q] = $\cup_{t\in[0,4]}$I(t)

Pour tout x de [1,5q], il existe un unique t naturel de [0,4] tel que x∈I(t) :
si t = 0 alors x∈[1,q] donc 5x∈[5,5q] donc s(5x)∈A(1).
si t = 1 alors x∈[q+1,2q] donc 5x∈[5q+5,10q] comme 5x – p = 5x – 10q – 1 donc
5x - p∈[-5q + 4, - 1] or s(5x – p) = s(5x) donc s(5x)∈A(-1).
si t = 2 alors x∈[2q+1,3q] donc 5x∈[10q+5,15q] comme 5x – p = 5x – 10q – 1 donc
5x - p∈[4, 5q - 1] or s(5x – p) = s(5x) donc s(5x)∈A(1).
si t = 3 alors x∈[3q+1,4q] donc 5x∈[15q+5,20q] comme 5x – 2p = 5x – 20q – 2 donc
5x - 2p∈[-5q+3, - 2] or s(5x – 2p) = s(5x) donc s(5x)∈A(-1).
si t = 4 alors x∈[4q+1,5q] donc 5x∈[20q+5,25q] comme 5x – 2p = 5x – 20q – 2 donc
5x - 2p∈[3, 5q - 2] or s(5x – 2p) = s(5x) donc s(5x)∈A(1).

Pour x et y de [1,5q] supposons s(5x) = s(5y) alors s(5x – 5y) = s(5x) – s(5y) = 0 donc il existe un entier d tel que 5x – 5y = dp donc p divise 5(x – y), comme p = 10q + 1avec q non nul alors 10 < p donc p ne divise pas 5 donc pgcd(p,5) = 1 car p est premier donc 1 est le seul diviseur positif commun à p et à 5 donc (th de Gauss) p divise x – y donc il existe un entier b tel que x – y = bp, or 1 ≤ x ≤ 5q et 1 ≤y ≤ 5q donc -5q ≤ -y ≤ -1 donc 1 – 5q ≤ x – y ≤ 5q – 1 donc 1 – $\frac{p-1}{2}$ ≤ bp ≤ $\frac{p-1}{2}$ – 1 donc $-\frac{p-3}{2}$ ≤ bp ≤ $\frac{p-3}{2}$ donc - (p – 3) ≤ 2bp ≤ p – 3 donc
– p < 2bp < p donc - 1< 2b < 1 comme 2b est entier alors 2b = 0 donc b = 0 donc x – y = 0 donc x = y.

Donc quand x décrit [1,5q], tous les s(5x) sont distincts et si x∈I(t) alors s(5x)∈I($(-1)^t$) et Card(I(t)) = q. Il y a 3 dans A(1) et deux dans A(-1) donc

$$\prod_{x\in[1,5q]} s(5x) = \prod_{t\in[0,4]}\left(\prod_{x\in I(t)} s(5x)\right) = s((-1)^{2q})s(1^{3q})\prod_{i\in[1,5q]} s(i) = \prod_{i\in[1,5q]} s(i)$$

Donc $s(5^{5q})\prod_{x\in[1,5q]} s(x) = \prod_{i\in[1,5q]} s(i) = s\left(\prod_{i\in[1,5q]} i\right) = s((5q)!)$

Donc $s(5^{5q})s\left(\prod_{x\in[1,5q]} x\right) = s((5q)!)$ donc $s(5^{5q})s((5q)!) = s((5q)!)$ donc
$s(5^{5q} \times (5q)!) = s((5q)!)$ donc $s((5^{5q} \times (5q)!) - (5q)!) = 0$ donc p divise (5^{5q} – 1)×(5q) !
donc p divise ($5^{\frac{p-1}{2}} - 1) \times \left(\frac{p-1}{2}\right)$!, si p divisait $\left(\frac{p-1}{2}\right)$! Alors, p étant premier, il existerait w entier de [1, $\frac{p-1}{2}$] tel que p diviserait w donc p ≤ w or w < p c'est impossible donc (Th de Gauss) p divise $5^{\frac{p-1}{2}} - 1$ donc $5^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0\ (mod\ p)$.

Rappelons que $u_{p-1} \equiv \frac{5^{\frac{p-1}{2}}-1}{2}$ (mod p) donc $2u_{p-1} \equiv 5^{\frac{p-1}{2}} - 1$ (mod p) donc $2u_{p-1} \equiv 0\ (mod\ p)$ donc p divise $2u_{p-1}$ comme p est impair alors pgcd(p,2) = 1 donc (th de Gauss) p divise u_{p-1}.

i)b) Si p est congru à -1 modulo 5 alors il existe un naturel a tel que p = 5a - 1, si a est impair alors p est pair et premier or 2 < p c'est impossible donc a est impair donc il existe un naturel q non nul tel que a = 2q donc p = 5(2q) - 1 = 10q - 1 donc p - 1 = 10q - 2 donc $\frac{p-1}{2} = 5q - 1$ et $\frac{p+1}{2} = 5q$

Soit s la surjection canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, morphisme pour les additions et pour les multiplications, donc s(p) = 0, notons A(1) = {s(k)/k∈[1,5q-1]∩ℕ} et
A(-1) = s(k)/k∈[-5q+1,-1]∩ℕ} alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ = {s(0)} ∪ A(1) ∪ A(-1).

Pour tout naturel t de [1,4], notons I(t) = [tq,(t+1)q-1]∩ℕ et I(0) =[1,q – 1]
alors [1,5q-1] = $\cup_{t\in[0,4]}$I(t)

Pour tout x de [1,5q-1], il existe un unique t naturel de [0,4] tel que x∈I(t) :
si t = 0 alors x∈[1,q-1] donc 5x∈[5,5q-5] donc s(5x)∈A(1).
si t = 1 alors x∈[q,2q-1] donc 5x∈[5q,10q-5] comme 5x – p = 5x – 10q +1 donc
5x - p∈[-5q + 1, - 4] or s(5x – p) = s(5x) donc s(5x)∈A(-1).
si t = 2 alors x∈[2q,3q-1] donc 5x∈[10q,15q-5] comme 5x – p = 5x – 10q + 1 donc
5x - p∈[1, 5q - 4] or s(5x – p) = s(5x) donc s(5x)∈A(1).
si t = 3 alors x∈[3q,4q-1] donc 5x∈[15q,20q-5] comme 5x – 2p = 5x – 20q + 2 donc
5x - 2p∈[-5q+2, - 3] or s(5x – 2p) = s(5x) donc s(5x)∈A(-1).
si t = 4 alors x∈[4q,5q-1] donc 5x∈[20q,25q-5] comme 5x –2p = 5x – 10q + 2 donc
5x - 2p∈[2, 5q -3] or s(5x – 2p) = s(5x) donc s(5x)∈A(1).

Pour x et y de [1,5q-1] supposons s(5x) = s(5y) alors s(5x – 5y) = s(5x) – s(5y) = 0 donc il existe un entier d tel que 5x – 5y = dp donc p divise 5(x – y), comme p = 10q - 1avec q non nul alors 8 < p donc p ne divise pas 5 donc pgcd(p,5) = 1 car p est premier donc 1 est le seul diviseur positif commun à p et à 5 donc (th de Gauss) p divise x – y donc il existe un entier b tel que x – y = bp, or 1 ≤ x ≤ 5q-1 et 1 ≤y ≤ 5q-1 donc -5q +1≤ -y ≤ -1 donc
2 – 5q ≤ x – y ≤ 5q – 2 donc $2 - \frac{p+1}{2} \leq bp \leq \frac{p+1}{2} - 2$ donc $-\frac{p-3}{2} \leq bp \leq \frac{p-3}{2}$ donc
- (p – 3) ≤ 2bp ≤ p – 3 donc – p < 2bp < p donc - 1< 2b < 1 comme 2b est entier alors
2b = 0 donc b = 0 donc x – y = 0 donc x = y.

Donc quand x décrit [1,5q-1], tous les s(5x) sont distincts et si x∈I(t) alors s(5x)∈I($(-1)^t$) et Card(I(t)) = q pour t de [1,4] et Card(I(0)) = q – 1.

$\prod_{x\in[1,5q-1]} s(5x) = \prod_{t\in[0,4]}\left(\prod_{x\in I(t)} s(5x)\right) = s((-1)^{2q})s(1^{3q-1}) \prod_{i\in[1,5q-1]} s(i) = \prod_{i\in[1,5q-1]} s(i)$

Donc $s(5^{5q-1}) \prod_{x\in[1,5q-1]} s(x) = \prod_{i\in[1,5q-1]} s(i) = s\left(\prod_{i\in[1,5q-1]} i\right) = s((5q-1)!)$

Donc $s(5^{5q-1})s\left(\prod_{x\in[1,5q-1]} x\right) = s((5q-1)!)$ donc $s(5^{5q-1})s((5q-1)!) = s((5q-1)!)$ donc $s(5^{5q-1} \times (5q-1)!) = s((5q-1)!)$ donc $s((5^{5q-1} \times (5q-1)!) - (5q-1)!) = 0$ donc p divise $(5^{5q-1} - 1)\times(5q-1)$! donc p divise $(5^{\frac{p-1}{2}} - 1) \times \left(\frac{p-1}{2}\right)$!, si p divisait $\left(\frac{p-1}{2}\right)$!

Alors, p étant premier, il existerait w entier de $[1, \frac{p-1}{2}]$ tel que p diviserait w donc $p \leq w$ or $w < p$ c'est impossible donc (Th de Gauss) p divise $5^{\frac{p-1}{2}} - 1$ donc $5^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0\ (mod\ p)$.

Rappelons que $u_{p-1} \equiv \frac{5^{\frac{p-1}{2}}-1}{2}$ (mod p) donc $2u_{p-1} \equiv 5^{\frac{p-1}{2}} - 1$ (mod p) donc $2u_{p-1} \equiv 0\ (mod\ p)$ donc p divise $2u_{p-1}$ comme p est impair alors pgcd(p,2) = 1 donc (th de Gauss) p divise u_{p-1}.